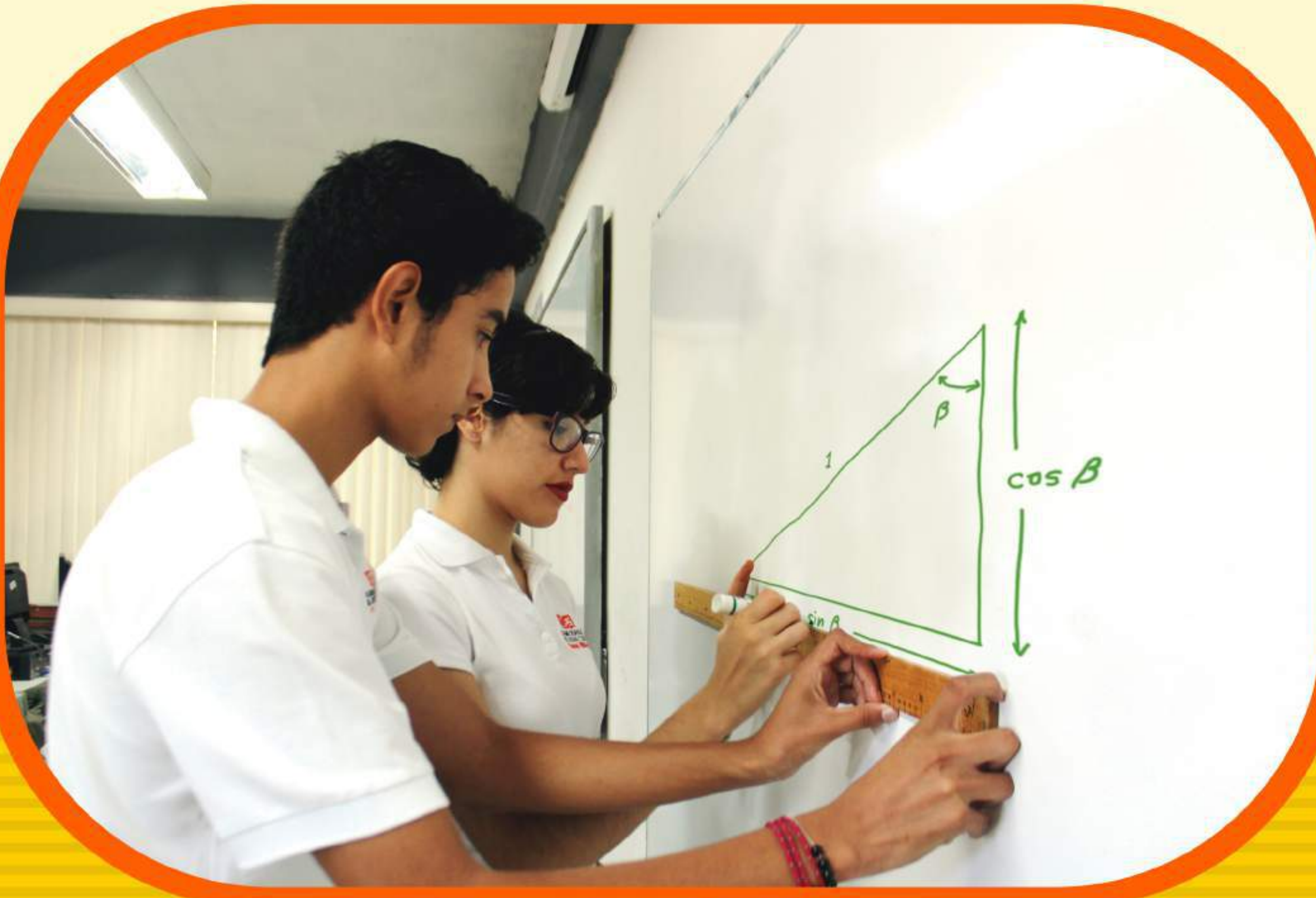
COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA

REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

MATEMÁTICAS 2

FORMACIÓN BÁSICA



MÓDULO DE APRENDIZAJE

SEGUNDO SEMESTRE

QUERIDOS JÓVENES:

Siempre he pensado que la juventud constituye una de las etapas más importantes en el desarrollo del ser humano; es la edad donde forjamos el carácter y visualizamos los más claros anhelos para nuestra vida adulta. Por eso, desde que soñé con dirigir los destinos de nuestro estado, me propuse hacer acciones concretas y contundentes para contribuir al pleno desarrollo de nuestros jóvenes sonorenses.

Hoy, al encontrarme en el ejercicio de mis facultades como Gobernadora Constitucional del Estado de Sonora, he retomado los compromisos que contraje con ustedes, sus padres y –en general con las y los sonorenses– cuando les solicité su confianza para gobernar este bello y gran estado. Particularmente lucharé de manera incansable para que Sonora cuente con "Escuelas formadoras de jóvenes innovadores, cultos y con vocación para el deporte". Este esfuerzo lo haré principalmente de la mano de sus padres y sus maestros, pero también con la participación de importantes actores que contribuirán a su formación; estoy segura que juntos habremos de lograr que ustedes, quienes constituyen la razón de todo lo que acometamos, alcancen sus más acariciados sueños al realizarse exitosamente en su vida académica, profesional, laboral, social y personal.

Este módulo de aprendizaje que pone en sus manos el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, constituye sólo una muestra del arduo trabajo que realizan nuestros profesores para fortalecer su estudio; aunado a lo anterior, esta Administración 2015-2021 habrá de caracterizarse por apoyar con gran ahínco el compromiso pactado con ustedes. Por tanto, mis sueños habrán de traducirse en acciones puntuales que vigoricen su desarrollo humano, científico, físico y emocional, además de incidir en el manejo exitoso del idioma inglés y de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

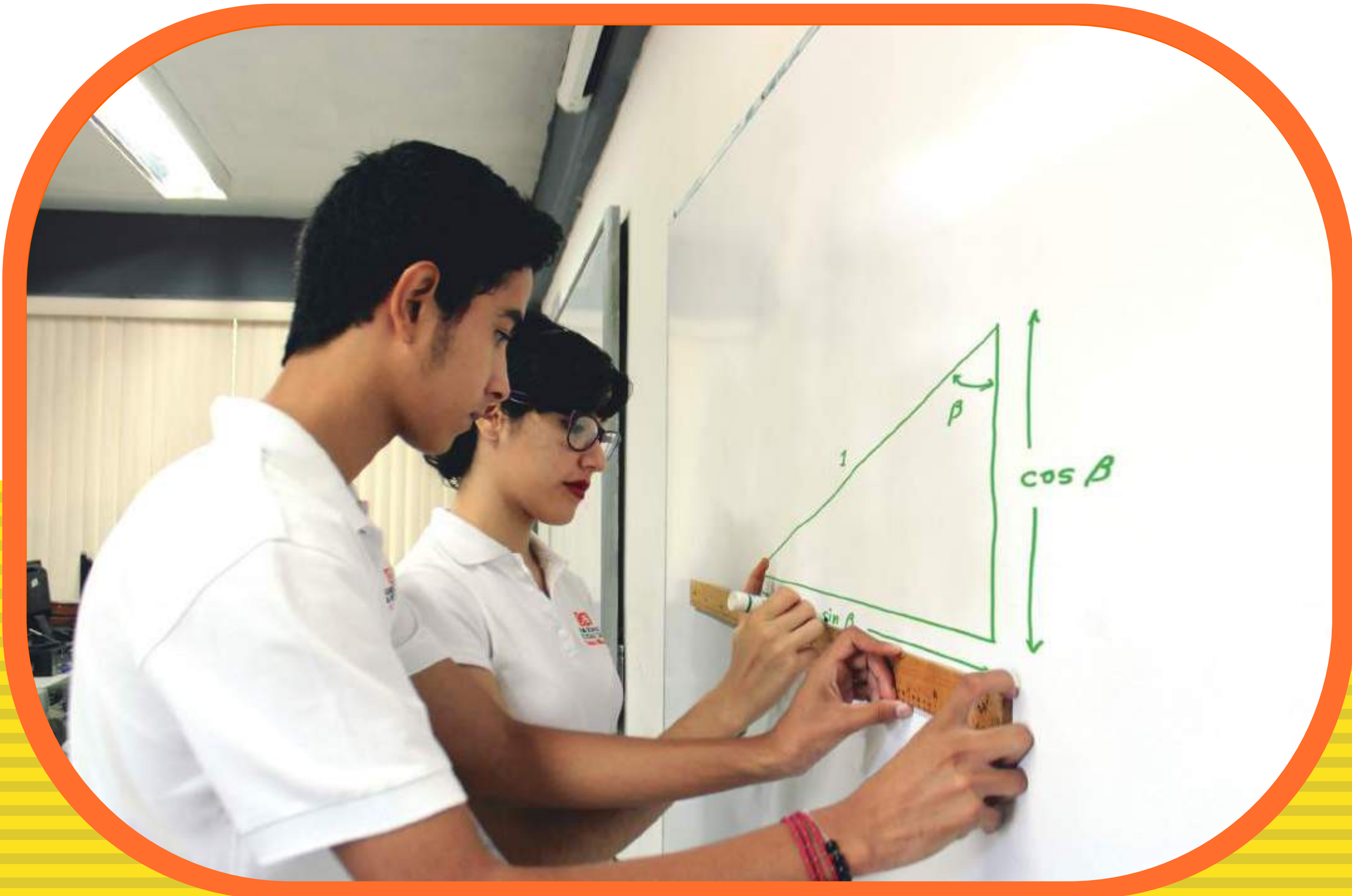
Reciban mi afecto y felicitación; han escogido el mejor sendero para que Sonora sea más próspero: la educación.

LIC. CLAUDIA ARTEMIZA PAVLOVICH ARELLANO
GOBERNADORA CONSTITUCIONAL DEL ESTADO DE SONORA

ESTADO DE SONORA

MATEMÁTICAS 2

FORMACIÓN BÁSICA



Erik Morales Mercado
Hermenegildo Rivera Martínez
Librada Cárdenas Esquer
María Elena Conde Hernández
Raúl Amavisca Carlton

COLEGIO DE BACHILLERESDEL ESTADO DE SONORA

DIRECCIÓN GENERAL

DIRECCIÓN ACADÉMICA

MATEMÁTICAS 2
Módulo de Aprendizaje

Tercera edición 2017. Impreso en México.

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO DE LA PRÁCTICA DOCENTE
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur.
Hermosillo, Sonora, México. C.P. 83280

COMISIÓN ELABORADORA

Elaboración:
Erik Morales Mercado
Hermenegildo Rivera Martínez
Librada Cárdenas Esquer
María Elena Conde Hernández
Raúl Amavisca Carlton

Revisión disiplinar:
Adán Durazo Armenta
Concepción Valenzuela García
Jesús Hiram Rodríguez Ortega
Karem Del Carmen Ruiz Escudero
Oscar Salazar Cano
Xóchitl Corrales Negrete

Corrección de estilo:
Francisco Castillo Blanco

Diseño y edición:
Luis Ricardo Sanchez Landín
Karla Fernanda Flores Torres
Daniela Carolina López Solis

Diseño de portada:
María Jesús Jiménez Duarte

Fotografía de portada:
Alma Ivete Montijo González

Banco de imágenes:
Shutterstock ©

Coordinación técnica:
Alfredo Rodríguez León
Rubisela Morales Gispert

Supervisión académica:
Barakiel Valdez Mendívil

Coordinación general:
Mauricio Gracia Coronado

ISBN: EN TRÁMITE

Esta publicación se terminó de imprimir durante el mes de diciembre de 2017.
Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México.
La edición consta de 200 ejemplares.

UBICACIÓN CURRICULAR

COMPONENTE:

FORMACIÓN BÁSICA

CAMPO DE CONOCIMIENTO:

MATEMÁTICAS

HORAS SEMANALES:

5

CRÉDITOS:

10

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: ____

Plantel: ____

Grupo: __________ Turno: __________ Teléfono: ______________

E-mail: ____

Domicilio: ____

____

PRESENTACIÓN

El Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), desde la implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior en 2007, de forma socialmente responsable, dio inicio a la adecuación de su Plan de estudios y a sus procesos de enseñanza aprendizaje y de evaluación para reforzar su modelo de Educación Basada en Competencias, y así lograr que pudieran sus jóvenes estudiantes desarrollar tanto las competencias genéricas como las disciplinares, en el marco del Sistema Nacional del Bachillerato.

Este modelo por competencias considera que, además de contar con conocimientos, es importante el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional. Dicho de otra forma, el ser competente se demuestra cuando, de forma voluntaria, se aplican dichos conocimientos a la resolución de situaciones personales o a la adquisición de nuevos conocimientos, habilidades y destrezas, lo que hace que se refuerce la adquisición de nuevas competencias.

En ese sentido el COBACH, a través de sus docentes, reestructura la forma de sus contenidos curriculares y lo plasma en sus módulos de aprendizaje, para facilitar el desarrollo de competencias. En el caso del componente de Formación para el Trabajo, además de las competencias genéricas, fortalece el sentido de apreciación hacia procesos productivos, porque aunque el bachillerato que te encuentras cursando es general y te prepara para ir a la universidad, es importante el que aprendas un oficio y poseas una actitud positiva para desempeñarlo.

De tal forma que, este módulo de aprendizaje de la asignatura de **Matemáticas 2**, es una herramienta valiosa porque con su contenido y estructura propiciará tu desarrollo como persona visionaria, competente e innovadora, características que se establecen en los objetivos de la Reforma Integral de Educación Media Superior.

El módulo de aprendizaje es uno de los apoyos didácticos que el COBACH te ofrece con la finalidad de garantizar la adecuada transmisión de saberes actualizados, acorde a las nuevas políticas educativas, además de lo que demandan los escenarios local, nacional e internacional. En cuanto a su estructura, el módulo se encuentra organizado en bloques de aprendizaje y secuencias didácticas. Una secuencia didáctica es un conjunto de actividades, organizadas en tres momentos: inicio, desarrollo y cierre.

En el inicio desarrollarás actividades que te permitirán identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las preconcepciones y los conocimientos que ya has adquirido a través de tu formación, mismos que te ayudarán a abordar con facilidad el tema que se presenta en el desarrollo, donde realizarás actividades que introducen nuevos conocimientos dándote la oportunidad de contextualizarlos en situaciones de la vida cotidiana, con la finalidad de que tu aprendizaje sea significativo. Posteriormente se encuentra el momento de cierre de la secuencia didáctica, donde integrarás todos los saberes que realizaste en las actividades de inicio y desarrollo.

En todas las actividades de los tres momentos se consideran los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales. De acuerdo a las características y del propósito de las actividades, éstas se desarrollan de forma individual, grupal o equipos.

PRESENTACIÓN

Para el desarrollo de tus actividades deberás utilizar diversos recursos, desde material bibliográfico, videos, investigación de campo, etcétera; así como realizar actividades prácticas de forma individual o en equipo.

La retroalimentación de tus conocimientos es de suma importancia, de ahí que se te invita a participar de forma activa cuando el docente lo indique, de esta forma aclararás dudas o bien fortalecerás lo aprendido; además en este momento, el docente podrá tener una visión general del logro de los aprendizajes del grupo.

Recuerda que la evaluación en el enfoque en competencias es un proceso continuo, que permite recabar evidencias a través de tu trabajo, donde se tomarán en cuenta los tres saberes, con el propósito de que apoyado por tu maestro mejores el aprendizaje. Es necesario que realices la autoevaluación, este ejercicio permite que valores tu actuación y reconozcas tus posibilidades, limitaciones y cambios necesarios para mejorar tu aprendizaje.

Así también, es recomendable la coevaluación, proceso donde de manera conjunta valoran su actuación, con la finalidad de fomentar la participación, reflexión y crítica ante situaciones de sus aprendizajes, promoviendo las actitudes de responsabilidad e integración del grupo.

Finalmente, se destaca que, en este modelo, tu principal contribución es que adoptes un rol activo y participativo para la construcción de tu propio conocimiento y el desarrollo de tus competencias, a través de lo que podrás dar la respuesta y la contextualización adecuadas para resolver los problemas del entorno a los que te enfrentes, ya sean personales o profesionales.

GLOSARIO ICÓNICO

El glosario icónico es la relación de figuras que encontrarás en diversas partes de tu módulo. Enseguida, se muestran junto con su definición, lo que te orientará sobre las actividades que deberás realizar durante el semestre en cada una de tus asignaturas.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Se trata de la evaluación que se realizará al inicio de cada secuencia didáctica y que te permitirá estar consciente de tus conocimientos acerca del tema que abordarás.

ACTIVIDAD INTEGRADORA

Esta actividad resume los conocimientos adquiridos durante un proceso, ya sea una secuencia didáctica, un bloque o lo visto en un semestre completo. Es la suma teórica y práctica de tus conocimientos y es útil para fortalecer tu aprendizaje.

Individual

ACTIVIDAD 1
SD1-B1

En Equipo   Grupo

Con este gráfico identificarás la Actividad dentro del texto, incluyendo la indicación y especificando si debe realizarse de manera individual, en equipo o grupal.

EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES

En este apartado encontrarás el espacio para calificar tu desempeño, que será por parte de tu profesor, tus compañeros (coevaluación) o tú mismo (autoevaluación).

AUTOEVALUACIÓN

En este espacio realizarás una evaluación de tu propio trabajo, misma que deberá ser honesta para que puedas identificar los conocimientos que has adquirido y las habilidades que has desarrollado, así como las áreas que necesitas reforzar.

REACTIVOS DE CIERRE

Son reactivos que aparecen al final de un bloque, al realizarlos reforzarás los conocimientos adquiridos durante el bloque y desarrollarás tus habilidades.

COEVALUACIÓN

Este tipo de evaluación se hace con uno o varios de tus compañeros, en ella tú los evalúas y ellos a ti. Les permite, además de valorar sus aprendizajes, colaborar y aprender unos de otros.

RÚBRICA DE EVALUACIÓN

La rúbrica es una tabla que contiene niveles de logro o desempeño especificados en estándares mínimos y máximos de la calidad que deben tener los diversos elementos que componen un trabajo. Sirve como guía para saber qué debe contener un trabajo y cómo debe ser realizado.

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Durante el semestre, tu profesor te irá indicando qué evidencias (trabajos y ejercicios) debes ir resguardando para integrarlos en un portafolio, mismos que le entregarás cuando te lo indique, a través del cual te evaluará.

REFERENCIAS

Es el listado de referencias que utilizaron los profesores que elaboraron el módulo de aprendizaje, contiene la bibliografía, las páginas de internet de las cuales se tomó información, los vídeos y otras fuentes que nutrieron los contenidos. Te permite también ampliar la información que te proporcione tu profesor o la del módulo mismo.

GLOSARIO

Es la relación de palabras nuevas o de las cuales pudieras desconocer su significado. Es útil para conocer nuevos conceptos, ampliar tu vocabulario y comprender mejor las lecturas.

CONTENIDO

CONTENIDO

COMPETENCIAS GENÉRICAS

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

1	Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2	Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3	Elige y practica estilos de vida saludables.
4	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5	Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6	Sustenta una postura personal sobre temas de interés y reelevancia general,considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7	Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8	Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9	Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10	Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11	Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

	COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS DEL CAMPO DE LAS MATEMÁTICAS	BLOQUES DE APRENDIZAJE I	II	III	IV	V
1	Contruye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	✓	✓	✓	✓	✓
2	Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	✓	✓	✓	✓	✓
3	Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	✓	✓	✓	✓	✓
4	Argumenta la solución obtenida de un problema, con método numérico, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de lña información y la comunicación.	✓	✓	✓	✓	✓
5	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.					
6	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.	✓	✓	✓	✓	
7	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.					
8	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.					

Matemáticas 2

1

Ángulos y triángulos.

Secuencia didáctica 1:
Ángulos en el plano

Secuencia didáctica 2:
Triángulos

2

Resuelve triángulos: congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

Secuencia didáctica 1:
Resuelve problemas utilizando criterios de congruencia y semejanza.

Secuencia didáctica 2:
Resuelve problemas aplicando los teoremas de Tales y Pitágoras

3

Propiedades de los polígonos y de la circunferencia

Secuencia didáctica 1:
Polígonos

Secuencia didáctica 2:
Circunferencia

4

Resuelve trigonometría I y II

Secuencia didáctica 1:
Razones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo y su generalización

Secuencia didáctica 2:
Identidades trigonométricas

5

Aplicas las leyes de los senos y cosenos

Secuencia didáctica 1:
Ley de los Senos

Secuencia didáctica 2:
Ley de los Cosenos

Bloque 1

Ángulos y triángulos.

Desempeño del estudiante ¿Cómo lo aprenderé?

- Identificando diferente tipos de ángulos y triángulos.
- Utilizando las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos a partir de situaciones cotidianas.
- Resolviendo ejercicios y problemas del entorno mediante la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Objetos de aprendizaje ¿Qué aprenderé?

- Clasificación de ángulos por su medida y por la posición de sus lados, así como la suma de sus medidas (ángulos complementarios y suplementarios).
- Identificar los ángulos por su posición entre dos rectas paralelas y una secante.
- Clasificar los triángulos por la medida de sus lados y la abertura de sus ángulos internos.

Competencias disciplinares a desarrollar Me servirá para:

- Expresar ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Construir hipótesis, diseñar y aplicar modelos para probar su validez.
- Utilizar tecnologías de la información y la comunicación para procesar e interpretar información.

Tiempo Asignado: 12 horas

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

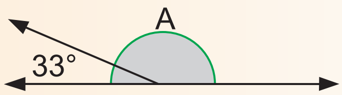
Instrucciones:

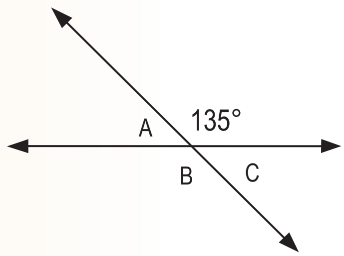
Lee detenidamente los siguientes planteamientos y reflexiona sobre el procedimiento que te permita obtener las soluciones. Realiza tu trabajo con orden y limpieza.

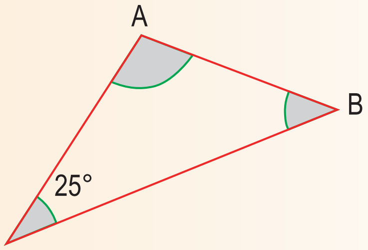
1.- En tu cuaderno grafica los siguientes ángulos en un plano cartesiano. Para ello utiliza un plano cartesiano para cada cuatro ángulos.

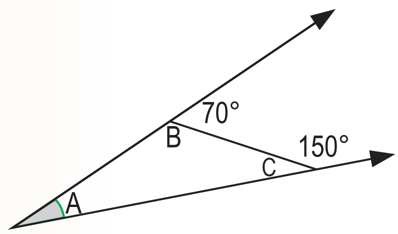
a) 30 °   b) 154 °   c) 270 °   d) 320 °   e) 200 °   f) 60 °
g) 120 °   h) 360 °

2.- Determina los valores de los ángulos faltantes en las siguientes figuras.









3.- Resuelve las siguientes operaciones.

1) $12° 23' 15'' + 48° 38' 59''$	2) $136° 52' 12'' + 96° 18' 20''$
3) $100° 07' 35'' + 15° 48' 17''$	4) $180° + 13° 12'$

4.- Subraya la respuesta correcta para cada caso.

i) El ángulo recto es aquél que mide exactamente:

a) 45° b) 90° c) 180° d) 270°

ii) Los ángulos interiores de un triángulo suman:

a) 90° b) 180° c) 270° d) 360°

iii) Determina para qué valor de x se cumple la siguiente ecuación $5x+10=x-30$:

a) $\frac{20}{3}$ b) $\frac{40}{6}$ c) -10 d) 10

iv) ¿Para qué valor de x se cumple la siguiente ecuación $\frac{x}{6}+\frac{7}{8}=\frac{41}{24}$?

a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{31}{2}$ c) 5 d) 8

v) Las siguientes afirmaciones corresponden a un ángulo, excepto:
a) Es la abertura que se forma entre dos rayos que comienzan en un punto.
b) Es la abertura que se forma entre dos rayos que comienzan en un punto. común.
c) Es el espacio comprendido entre dos segmentos de recta que se cruzan en un punto.
d) Lo determina la longitud de los segmentos que se cruzan en un punto.

Instrumento de evaluación

Si de la actividad anterior respondiste correctamente todos los reactivos considera tu nivel de conocimientos **EXCELENTE**, si fueron de 19 a 20 reactivos correctos tu nivel se considera como **MUY BUENO**, si fueron de 16 a 18 **BUENO**, de 13 a 15 **REGULAR** y menos de 11 **INSUFICIENTE**, lo que exige refuerces tus conocimientos previos.

<table>
<tr><td rowspan="5">¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos en función de las respuestas correctas que tuviste?
Señala con una ✓ según sea el número de reactivos correctamente contestados.
➢ Expresar ideas y conceptosmediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
➢ Contribuye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar validez.
Esta competencia será alcanzada si obtuviste un desempeño un BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE.</td><td>EXCELENTE.</td><td></td></tr>
<tr><td>MUY BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>REGULAR.</td><td></td></tr>
<tr><td>INSUFICIENTE.</td><td></td></tr>
</table>

Si tu resultado fue **BUENO**, **MUY BUENO** O **EXCELENTE** te felicitamos y te motivamos a que sigas esforzándote como lo has hecho y, obviamente, que corrijas aquello que no te permitió alcanzar la excelencia; si tu desempeño fue **REGULAR** O **INSUFICIENTE**, refuerza tus conocimientos consultando de nuevo el contenido del bloque si lo consideras necesario. Además te invitamos a que te acerques a tu maestro o tus compañeros para que le solicites el apoyo para reforzar los temas en los que fallaste, asimismo, que acudas a asesorías en donde se te apoyará para que mejores tu desempeño y puedas obtener mejores resultados.

Inicio

Secuencia didáctica 1
ÁNGULOS EN EL PLANO

De entrada

Al término de esta secuencia podrás realizar actividades en las que clasificarás cualquier ángulo con respecto a la posición de sus lados, convertirás ángulos de forma sexagesimal a decimal y viceversa. Por último identificarás los elementos básicos de la geometría: punto, línea, segmento y ángulo.

De estas actividades obtendrás las siguientes evidencias de aprendizaje: la aplicación de las propiedades de los triángulos en situaciones teóricas o prácticas, el cálculo a partir de los datos conocidos del valor de los ángulos en rectas paralelas cortadas por una secante.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

• Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos
    o Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.
    o Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Además como producto principal, mediante un reporte de investigación podrás determinar la importancia del uso de los ángulos en situaciones de aplicación real.

Seguramente cuando eras niño alguna vez jugaste con legos, dados o rompecabezas de diferentes formas, que al apilarlos o juntarlos formabas torres pequeñas y también identificabas figuras geométricas para introducir diferentes piezas en un juego didáctico, como el círculo, el cuadrado, el triángulo, el hexágono. Formas que te permiten incursionar en el inmenso campo de la Geometría.

Esta disciplina está fuertemente inmersa en nuestra vida cotidiana, gracias a ella puedes desarrollar tus habilidades de creación e imaginación, por ejemplo: como un diseñador de muebles, de autos, de moda o de herramientas, como un artista de artes plásticas, un pintor, un escultor o como un arquitecto. Todos ellos utilizan las formas y el lenguaje geométrico (como la simetría, la congruencia, la semejanza) para producir lo que les interesa y que se adaptan a nuestras necesidades.

En la calle vemos diferentes formas en los letreros de no estacionarse, en un alto, la forma en la que las calles de nuestra ciudad está trazada, la distancia entre dos puntos de la ciudad, la arquitectura en los edificios tanto antiguos como modernos, en la naturaleza misma, en las formas que el hombre da a las tierras de cultivo, son sólo algunas formas geométricas usadas por el hombre para su beneficio y de acuerdo a sus necesidades.

ACTIVIDAD 1
SD1-B1

De manera individual, subraya los enunciados que representan situaciones cotidianas donde se utilice el lenguaje geométrico.

1. La avenida Colosio es perpendicular a la calle Reforma.
2. Un automóvil es simétrico.
3. Mi hermano mayor tiene el triple de edad que tú.
4. Caminas dos cuadras hacia el Norte, das vuelta a la derecha y llegarás a la biblioteca.
5. El bote de pintura es cilíndrico.
6. Utiliza unas ménsulas (estructura de acero de 90°) para colocar la repisa.
7. El precio de la gasolina va a la alza de manera constante.
8. Mi automóvil consume dos veces menos gasolina que el tuyo.
9. La maqueta de la plaza Bicentenario está en una escala de 5 a 1.
10. Las calles General Piña y Revolución son paralelas.

Ahora imagínate que ya eres un profesionista que trabaja en el ámbito que más te guste (contaduría, administración, sistemas informáticos, medicina, robótica, arquitectura, etc.); o bien que te dedicas a actividades como el comercio o la industria, o mejor aún que eres dueño de una franquicia de farmacias o comida rápida.

Reflexiona acerca de la relación que tiene la geometría con las actividades diarias que hayas elegido desarrollar y descríbelas en el siguiente espacio:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Participa en la plenaria de resultados para tu autoevaluación de la actividad y proporciona a tu profesor el libro para su revisión.

¿Quién fue?

Euclides de Alejandría

Matemático griego cuya obra principal "Elementos de geometría", es un extenso tratado de matemáticas sobre geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio.

Desarrollo

Elementos básicos de la geometría

Como ya se mencionó anteriormente en este bloque pondrás en práctica los conocimientos aprendidos en la secundaria. El lenguaje geométrico conociendo los elementos básicos que la conforman, ángulos y su clasificación, así como los triángulos su clasificación y propiedades, etc. Te servirán de base para lograr los nuevos aprendizajes.

Mediante la resolución de una serie de ejercicios y problemas, aprenderás a plantear y resolver situaciones donde se aplican dichos conceptos o elementos básicos de la geometría.

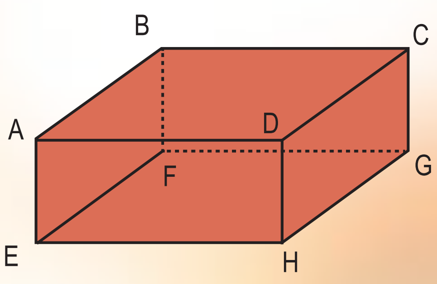
En el antiguo Egipto cada año se presentaba el problema del reparto de tierra a los campesinos con el objetivo de que a cada uno le tocara la misma cantidad de terreno en la riberas del río Nilo, pero debido a las inundaciones que año con año se presentaban la forma de la tierra cambiaba constantemente. Por ello, los egipcios dedicaron gran parte de sus recursos en el estudio de la forma más equitativa posible de realizar el reparto de tierras.

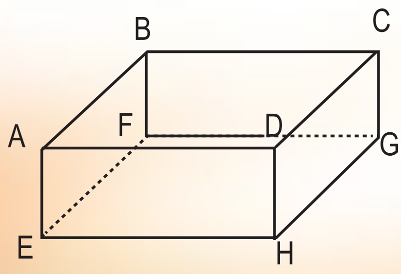
Por esta necesidad de medir la tierra, surgen los vocablos griegos: ***geos*** (*tierra*) y ***metron*** (*medida*) que dan origen a la palabra geometría. Sin embargo, la aplicación de la geometría rápidamente impacta en otras actividades del ser humano, como la arquitectura, el diseño, la ingeniería y la astronomía.

La geometría como disciplina básicamente se clasifica en 6 ramas, geometría plana, analítica, algorítmica, del espacio, descriptiva y proyectiva. En la tercera parte de tu curso de matemáticas 2 nos ocupa el estudio de la geometría plana.

Para comprender el lenguaje geométrico de la parte que nos ocupa, analizaremos algunos elementos básicos que sentaron las bases para el desarrollo de la disciplina. Ya que no es fácil dar una definición formal de dichos conceptos o elementos básicos, se dará una descripción de qué consisten.

En la siguiente figura tenemos un sólido y su representación geométrica, los sólidos tienen tres dimensiones: largo, ancho y altura.

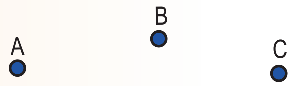




El sólido se encuentra limitado por superficies planas que sólo tienen dos dimensiones: largo y ancho. Por ejemplo, en la figura anterior, una de sus superficies es el rectángulo ABCD, que es limitado a la vez por cuatro segmentos de recta, uno de ellos es el segmento AB, el cual sólo tiene una dimensión: largo.

A su vez los segmentos de recta se cortan en puntos; por ejemplo, los segmentos AB y BC se cortan en el punto B. Los puntos carecen de dimensión, sólo tienen posición.
Así, es posible describir los elementos básicos con los cuales inicia el estudio de la geometría plana o Euclidiana.

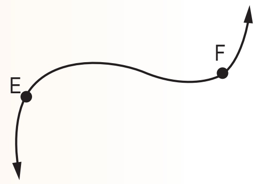
Punto: Objeto que sólo tiene posición, es decir, carece de dimensión. Para nombrarlo o indicarlo se utilizan letras mayúsculas, por ejemplo:



Línea: Es un conjunto infinito de puntos. Es una forma que tiene longitud (largo) pero carece de ancho y alto, es decir, es una forma de una dimensión. Existen varios tipos de líneas.

Línea recta: Conjunto de puntos tal que dos puntos consecutivos de ella tienen una misma pendiente o inclinación o dirección. Para nombrar una recta utilizamos dos puntos que le pertenecen, nombrados por letras mayúsculas distintas y una flecha doble colocada en la parte superior de las letras. Por ejemplo $\overleftrightarrow{CD}$ es la línea recta que se muestra.

Línea curva: Conjunto de puntos siempre unidos tal que no se encuentran en una misma dirección, es decir, que entre cada par de puntos consecutivos no existe la misma pendiente.



Segmento de recta: Porción de recta comprendida entre dos puntos llamados extremos. También se conoce como la distancia más corta entre dos puntos que se encuentran en un mismo plano. Para denotar un segmento de recta se utilizan los extremos nombrados por letras mayúsculas y una raya colocada en la parte superior de las letras. Por ejemplo $\overline{AB}$ es el segmento de recta que se muestra.

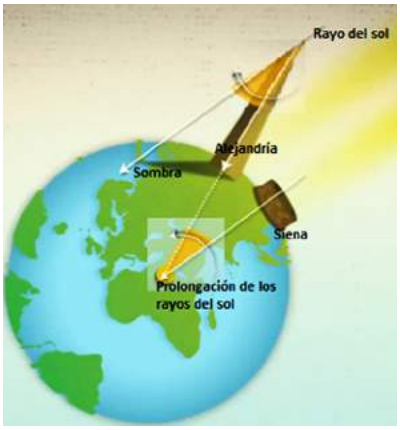
Semirrecta o rayo: Porción de recta que empieza en un punto fijo y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto indica el inicio de la semirrecta o rayo y la flecha indica que termina. Ejemplo (AB) $\overrightarrow{AB}$ es el rayo que se muestra.

Ángulos en el plano

Antes de iniciar con la definición de ángulo precisamos contar la historia, de cómo, Eratóstenes midió con una aproximación muy acertada para sus tiempos, el perímetro de la tierra.

Eratóstenes y la medida del perímetro de la tierra.

Desde la antigüedad los hombres de ciencia se han cuestionado el tamaño de la tierra; el perímetro de la tierra fue calculado por vez primera en Egipto, en el año 235 A.C. con la genial estrategia que el matemático, astrónomo y geógrafo griego Eratóstenes nacido en Cirene, consideró para su cálculo.



Sabiendo por informes previos que el sol, en el solsticio de verano, de ese año se encontraba en mediodía en la parte máxima del cielo de la ciudad antigua de Siena (actualmente Asuán), situada a 800 km al sur de Alejandría, donde se observó que una columna vertical no producía sombra, deduciendo entonces que los rayos del sol llegaban de manera perpendicular a la superficie de la tierra en esa ciudad. Eratóstenes, para confirmar dicha hipótesis desde la ciudad de Siena, observó cómo los rayos del sol ingresaban verticalmente en un pozo, ya que éste estando exactamente encima del pozo se dio cuenta cómo los rayos se reflejaban completamente en el fondo del mismo, y la orilla del pozo no producía sombra alguna. Fenómeno que no se producía de la misma forma en Alejandría ese día y a esa misma hora.

Eratóstenes razonó que si los rayos solares se prolongaban en esa misma dirección podrían llegar hasta el centro de la tierra, así como cualquier otra recta vertical que se proyectara desde otra ciudad. Además de suponer que por la lejanía del sol los rayos se reflejan de manera paralela en la superficie de la tierra, ya que él concebía que la tierra no era plana sino redonda. Por lo que el genio matemático, desde Alejandría se dio a la tarea de calcular el ángulo formado por los rayos del sol y una vara vertical utilizando un scaphe. Colocó en el centro del instrumento una vara vertical para captar los rayos del sol a través de la sombra proyectada por la vara y con la ayuda de un gnomon que servía para medir la altura del sol, determinó el ángulo formado por la sombra de la vara y los rayos del sol.

A través del tiempo...

Scaphe: instrumento esférico cuya superficie está cuadriculada.

Luego con este ángulo era sencillo deducir por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el ángulo que los rayos del sol forman con la vara vertical.

A través del tiempo...

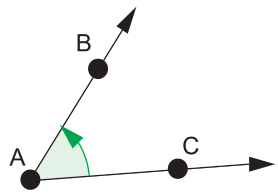
Gnomon: instrumento que servía para medir la altura del sol con respecto al paso del tiempo, consta de una superficie plana horizontal con una escala graduada, sobre la cual se coloca de manera perpendicular un objeto alargado llamado estilo.

Eratóstenes de una manera simple y muy acertada prolongó los rayos que el sol proyectaba en el pozo en Siena hasta el centro de la tierra; el ángulo que se forma en el centro de la tierra es congruente (igual en medida) al ángulo formado por los rayos del sol y la vara vertical que Eratóstenes había calculado en Alejandría con la ayuda del scaphe y el gnomon. Esto se explica si consideramos que los rayos del sol se proyectan de manera paralela a la superficie terrestre y la prolongación de la vertical la consideramos como una secante. El par de ángulos que se comparan dentro del esquema son ángulos alternos internos que resultan ser congruentes, es decir, que tienen la misma medida.

Y llegó entonces a la siguiente conclusión, conocido el ángulo central que suspende la longitud de arco, que es la distancia entre Alejandría y Siena, que equivalía a 5000 estadios (estadio: medida de longitud (usadas en las antiguas ciudades de Grecia y Roma) de 125 pasos geométricos equivalente a 185 m aproximadamente). Dedujo entonces la parte que esa longitud de arco cabía en el perímetro de la circunferencia terrestre, calculando así de una manera muy sencilla y acertada la circunferencia de la tierra.

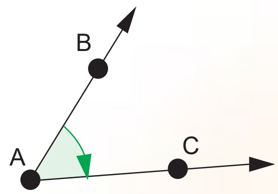
Fuente de imágenes: https://www.youtube.com/watch?v=UeIQnjOEGUY

Es precisamente de esta historia de la que se puede partir para definir el concepto que nos atañe en esta sección.



Ángulo es la abertura que se forma entre dos semirrectas o rayos que tienen un punto en común llamado vértice. A las semirrectas se le denominan lados del ángulo.

Para denotar un ángulo mediante tres letras mayúsculas, la primera y la última letra indican los lados del ángulo y la segunda su vértice. Ejemplo *<BAC* es el ángulo negativo medido en sentido a las manecillas del reloj.



Mientras que *<CAB* es el ángulo positivo medido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Lo importante es que la letra de en medio (en este caso A) represente siempre el vértice del ángulo.

ACTIVIDAD 2
SD1-B1

Organizados en equipos de tres integrantes, realicen la lectura de Eratóstenes y la medida del perímetro de la tierra, en su cuaderno escriban por lo menos 10 enunciados que representen situaciones donde se utilice el lenguaje geométrico. Entreguen a su profesor(a) para su revisión.

ACTIVIDAD 3
SD1-B1

De manera individual responde a los siguientes cuestionamientos a cerca de cómo Eratóstenes realizó el cálculo del perímetro de la tierra.

1. … por lo que el genio matemático desde Alejandría se dio a la tarea de calcular el ángulo formado por los rayos del sol y una vara vertical utilizando un ***scaphe***…¿Cómo logró realizar la medición de dicho ángulo? (Describe la forma)

2. Observa el dibujo, con los datos que él sabía ¿Qué figura formó?

3. Dentro de dicha figura, ¿Qué datos tenía Eratóstenes para poder calcular la medida del ángulo que necesitaba saber?

4. Con dicha información, ¿Es posible calcular de manera directa el ángulo de su interés?

5. Entonces, ¿Qué ángulo le permitió conocer?

6. ¿Qué herramienta matemática crees que usó para calcular la medida del ángulo que describes en la pregunta 5?

7. ¿Qué tuvo que hacer para calcular el ángulo que le interesaba conocer, el ángulo formado por la vara y los rayos del sol?

8. ¿Qué razonamiento siguió Eratóstenes para concluir el valor del ángulo formado en el centro de la tierra?

9. ¿Cuál fue el valor del ángulo central calculado por Eratóstenes?

10. Con el valor de dicho ángulo, ¿Qué razonamiento siguió para determinar la fracción del perímetro de la tierra (longitud de arco) formada entre Alejandría Y Siena?

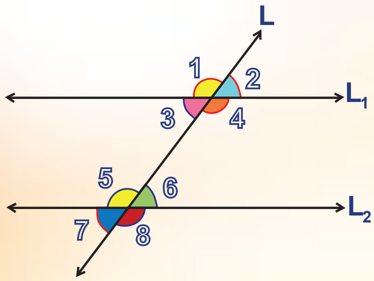
11. ¿Cuál es la distancia que Eratóstenes sabía que había entre éstas dos ciudades?

12. Por último, ¿Cuál es el perímetro de la tierra que concluyó Eratóstenes?

Clasificación de ángulos

De acuerdo al razonamiento que Eratóstenes realizó “que si los rayos solares se prolongaban en esa misma dirección podrían llegar hasta el centro de la tierra, así como cualquier otra recta vertical que se proyectara desde otra ciudad. Además de suponer que por la lejanía del sol los rayos se reflejan de manera paralela en la superficie de la tierra, ya que él concebía que la tierra no era plana sino redonda”. Se rescata la construcción de los ángulos que se forman a partir de una par de rectas paralelas cortadas por una secante o transversal como lo muestra la figura:

Con base en la figura, son ocho ángulos que se forman a uno y otro lado de la secante (L), arriba y debajo de las rectas paralelas (***L_1*** y ***L_2***)



La clasificación se hace por parejas como se muestra a continuación:

Nombre del par ángulos	Ángulos
Correspondientes (Par de ángulos que están del mismo lado de la secante, del mismo lado de las paralelas, uno es externo y el otro es interno)	∢1 Y ∢5 ∢2 Y ∢6 ∢3 Y ∢7 ∢4 Y ∢8
Alternos internos (Par de ángulos que están de uno y otro lado de la secante por la parte interna entre las paralelas)	∢3 Y ∢6 ∢4 Y ∢5
Alternos externos (Par de ángulos que están de uno y otro lado de la secante por la parte externa de ambas paralelas)	∢1 Y ∢8 ∢2 Y ∢7

Ubica bien en la figura cada par de ángulos que se mencionan, observa y razona el nombre dado a cada par de ellos.

Imagina que en la figura anterior traspones (encimar) la recta L_2 con la recta L_1, ¿Qué pasa con los ángulos?, si observas bien resultan ser iguales en medida ¿verdad?, es decir, son congruentes. Luego se deduce que los ángulos correspondientes, alternos internos y externos son congruentes. De ahí el resultado de la maravillosa deducción que realizó Eratóstenes al calcular el ángulo formado desde el centro de la tierra para determinar así el perímetro de la tierra.

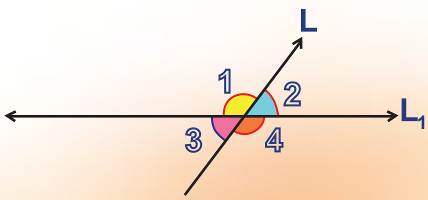
Clasificación de los ángulos según su medida

ACTIVIDAD 4
SD1-B1

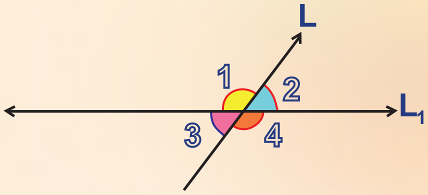
En el cuaderno, elabora un mapa mental de la clasificación de los ángulos, según su medida considerando una imagen de alguna situación real que refleje el ángulo a definir.

Clasificación de parejas de ángulos según la posición de sus lados.

Ángulos opuestos por el vértice: Son aquellos que tienen un vértice en común y los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.



Las parejas de ángulos opuestos por el vértice con base en la figura anterior son:
∢1 y ∢4 , además los ángulos ∢2 y ∢3. Si observas con atención estos pares de ángulos son congruentes.



Ángulos adyacentes: Son aquellos que tienen un vértice en común y comparten uno de sus lados. Nuevamente de la figura podemos deducir que las parejas de ángulos que cumplen con las características para ser adyacentes son:

$$\measuredangle 1 \text{ y } \measuredangle 2, \quad \measuredangle 1 \text{ y } \measuredangle 3, \quad \measuredangle 2 \text{ y } \measuredangle 4 \text{ y } \quad \measuredangle 3 \text{ y } \measuredangle 4$$

De las parejas de ángulos que son adyacentes, hay dos que debemos destacar en especial: los complementarios y los suplementarios.

Ángulos complementarios: Son dos o más ángulos adyacentes cuyas medidas suman un ángulo recto, es decir, suman $90°$. Así, si se tienen dos ángulos complementarios un ángulo es complemento del otro.

Ejemplo 1.

¿Cuál es el complemento de $62º$?

Ya que se solicita el complemento, damos por hecho que los ángulos son complementarios, por lo que se cumple la ecuación:

$$62° + \measuredangle A = 90°.$$

Donde <A es el complemento que se busca, es decir, es el complemento del ángulo de 62º. Por lo que realizando el despeje correspondiente rápidamente se deduce que:

$$\measuredangle A = 90° - 62° = 28°$$

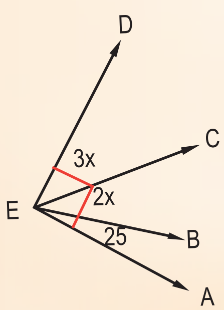
Para comprobar el resultado es suficiente realizar la suma de ambos ángulos y verificar que ésta sea de $90º$.

Ejemplo 2.

A partir de la figura, determina las magnitudes de los ángulos faltantes.

Para resolver este problema nos percatamos que los tres ángulos adyacentes son complementarios, ya que $\measuredangle AED$ es un ángulo recto como lo marca la figura. Por lo que se cumple que:

$$\measuredangle AEB + \measuredangle BEC + \measuredangle CED = 90°$$
$$25° + 2x + 3x = 90°$$



Ya que los ángulos dependen de una sola incógnita (x), el objetivo inmediato entonces es conocer el valor de x para proceder a conocer el valor de cada uno de los ángulos en cuestión.

$$25° + 5x = 90°$$
$$5x = 90° - 25°$$
$$5\boldsymbol{x} = 65$$
$$\frac{5\boldsymbol{x}}{5} = \frac{65}{5}$$
$$x = 13°$$

Por lo que $\measuredangle BEC= 2x= 2(13°) =26°$ y $\measuredangle CED= 3x= 3(13°)= 39°$. Para comprobar tales resultados es suficiente sustituir en la ecuación original:

$$25°+26°+39°= 90°$$
$$90°= 90°$$

Sistema sexagesimal como sistema posicional

El sistema sexagesimal es un sistema de numeración posicional que emplea como base aritmética el número 60. Tuvo su origen en la antigua Mesopotamia, en la civilización sumeria. Se usa para medir tiempos (horas, minutos y segundos) y ángulos (grados) principalmente.

Utilizamos el grado (º) como unidad de medida básica; el cuál se define como la 360ª parte de una circunferencia. Para unidades más pequeñas se utiliza el minuto (') que divide al grado en 60 partes iguales ($1°=60'$) y el segundo ('') que a su vez divide al minuto en 60 partes iguales, es decir: $1=60''$. Por lo tanto $1°=3600''$. Así, si un ángulo se expresa con estas tres unidades de medida grados u horas, minutos y segundos, se dice que está expresado en el sistema sexagesimal.

Ejemplo 3.

Determina el complemento del ángulo $24°\ 17'\ 32''$.

Para determinar lo que se pide es necesario representar el ángulo de 90º en el sistema sexagesimal, es decir, en grados, minutos y segundos.

$$90°=89°+1°=89°\ 60', \text{ ya que } 1°=60'.$$

Puesto que el ángulo dado también tiene segundos, de igual forma podemos descomponer 60' usando el hecho de que 1'=60'' para obtener una expresión del ángulo equivalente que incluya los segundos.

$$90°= 89° + 1° = 89°\ 60' = 89°\ 59' + 1' = 89°\ 59'\ 60''$$

Ahora podemos efectuar la resta que nos interesa.

$$\begin{array}{lll} 89° & 59' & 60'' \ - \\ 24° & 17' & 32'' \\ \hline 65° & 42' & 28'' \end{array}$$

De esta manera el complemento de $24°\ 17'\ 32''$ es $65°\ 42'\ 28''$.

Ángulos suplementarios: Son ángulos adyacentes cuyas medidas suman un ángulo llano, es decir, suman 180º. Así, si dos ángulos son suplementarios uno es el suplemento del otro.

Ejemplo 4.

Determina el suplemento del ángulo $58° \, 41'$.

De igual manera para llevar a cabo la resta se necesita expresar el ángulo de 180º en grados y minutos, ya que así está compuesto el ángulo dado.

$$180°=179°+1°=179° \, 60'$$

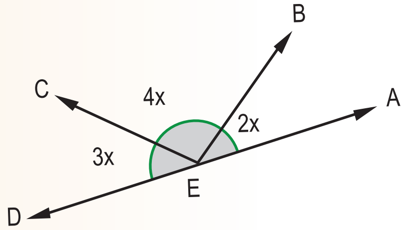
Efectuamos la resta.

$$\begin{array}{r} 179° \;\; 60' \; - \\ 58° \;\; 41' \;\;\; \\ \hline 121° \;\; 19' \;\;\; \end{array}$$

De esta manera el suplemento de $58° \, 41'$ es $121° \, 19'$.

Ejemplo 5.

Determina la medida de los ángulos que se muestran en la figura.



Para encontrar las medidas de los ángulos es preciso percatarnos que los ángulos adyacentes un llano, por lo que juntos suman 180º. De aquí establecemos la ecuación.

$$\sphericalangle AEB+\sphericalangle BEC+\sphericalangle CED=180°$$
$$2x+4x+3x=180°$$
$$9x=180°$$
$$\frac{9x}{9}=\frac{180}{9}$$
$$x=20°$$

Ahora sustituyendo el valor de la incógnita en cada uno de los ángulos tenemos:

$\sphericalangle AEB=2x=2(20°)=40°$; $\sphericalangle BEC=4x=4(20°)=80°$ y $\sphericalangle CED=3x=3(20°)=60°$. Para comprobar tales resultados es suficiente sustituir en la ecuación establecida:

$$\sphericalangle AEB+\sphericalangle BEC+\sphericalangle CED= 180°$$
$$40°+80°+60°= 180°$$
$$180° = 180°$$

Ángulos conjugados: Son ángulos adyacentes cuyas medidas suman un ángulo completo, es decir, suman 360º. Así, si dos ángulos son conjugados uno es el conjugado del otro.

Ejemplo 6.

Determina el conjugado del ángulo $158° \, 37' \, 16''$.
De igual manera para llevar a cabo la resta se necesita expresar el ángulo de 360º en grados, minutos y segundos, ya que así está compuesto el ángulo dado.

$$360° = 359° + 1° = 359° \, 60' = 359° \, 59' + 1' = 359° \, 59' \, 60''$$

Efectuamos la resta.

$$\begin{array}{r} 359° \, 59' \, 60'' \; - \\ 158° \, 37' \, 16'' \\ \hline 201° \, 22' \, 44'' \end{array}$$

De esta manera el suplemento de $158° \, 37' \, 16''$ es $201° \, 22' \, 44''$.

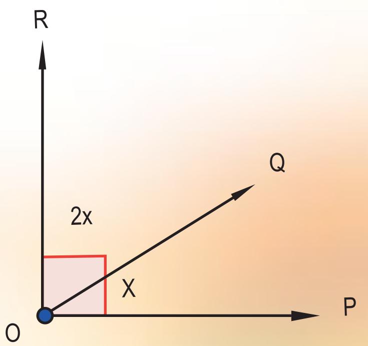
ACTIVIDAD 5
SD1-B1

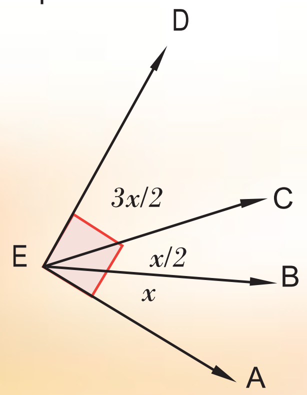
De manera individual realiza la siguiente actividad en tu cuaderno.

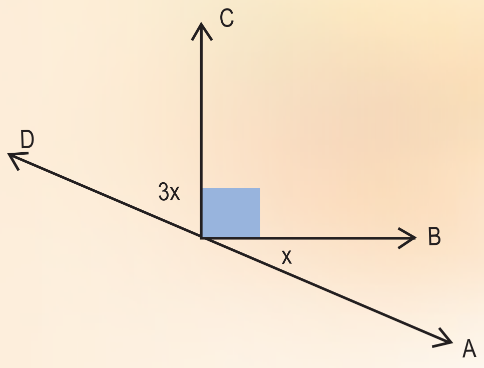
1. Determina lo que se solicita en la tabla utilizando sólo ángulos positivos y en el sistema sexagesimal (° ,' ,'').

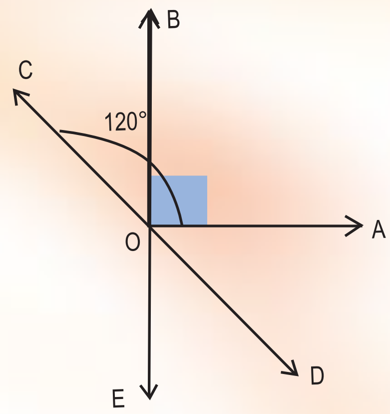
Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
$80°$			
$15°$			
$126° \, 34'$			
$79° \, 35' \, 12''$			
$295° \, 36'$			

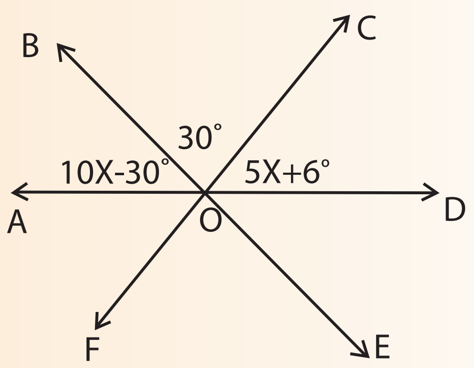
2. Determina el valor de los ángulos que se forman en cada una de las figuras que se muestran a continuación. En el caso de los ángulos en decimales expresarlos en el sistema sexagesimal.

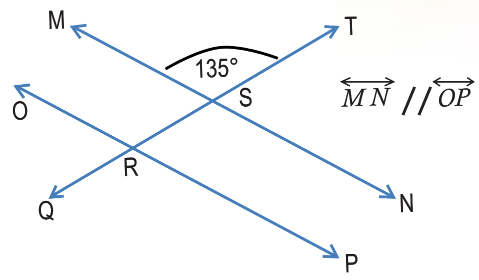


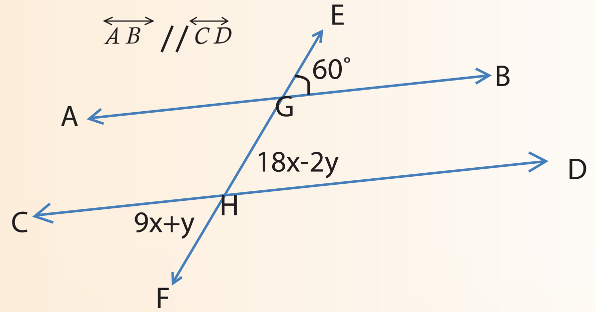


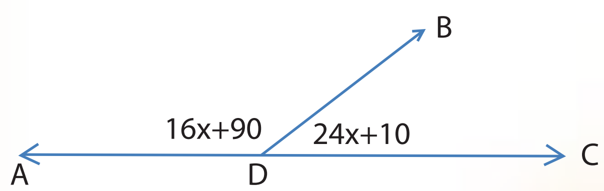












3. Convierte en notación sexagesimal los siguientes ángulos.
   d) 34.45°
   e) 125.6666°
   f) 189.0083°
   g) 45.7625°

Instrumento de evaluación

Si de la actividad anterior respondiste correctamente todos los reactivos considera tu nivel de conocimientos **EXCELENTE**, si fueron de 14 a 16 correctos tu nivel se considera como **MUY BUENO**, si fueron de 11 a 13 **BUENO**, de 8 a 10 **REGULAR** y menos de 8 **INSUFICIENTE**, lo que exige refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos en función de las respuestas correctas que tuviste? **Señala con una ✓ según sea el número de reactivos correctamente contestados.** ➢ C.G. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. ➢ C.D. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y/o geométricos. Esta competencia será alcanzada si obtuviste un desempeño un **BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE.**	**EXCELENTE.**	
	MUY BUENO.	
	BUENO.	
	REGULAR.	
	INSUFICIENTE.	

Si tu resultado fue **BUENO**, **MUY BUENO** O **EXCELENTE** te felicitamos y te motivamos a que sigas esforzándote como lo has hecho y, obviamente, que corrijas aquello que no te permitió alcanzar la excelencia; si tu desempeño fue **REGULAR** O **INSUFICIENTE**, refuerza tus conocimientos consultando de nuevo el contenido del bloque si lo consideras necesario. Además te invitamos a que te acerques a tu maestro o tus compañeros para que le solicites el apoyo para reforzar los temas en los que fallaste, asimismo, que acudas a asesorías en donde se te apoyará para que mejores tu desempeño y puedas obtener mejores resultados.

Cierre

En esta secuencia se han estudiado lo ángulos y su clasificación, según su medida y según la posición de sus lados. Si observas con detenimiento el entorno donde te encuentras en este momento, te darás cuenta de la aplicación de ésta figura geométrica y qué tantos beneficios a traído en el desarrollo y optimización de un sin número de inventos y situaciones creadas por el hombre.

ACTIVIDAD 6
SD1-B1

Guarda el ejercicio en tu portafolio de evidencias.

Dada cada situación elaboren un reporte respondiendo lo que se solicita. Anexa a tu reporte la lista de cotejo que viene al final de la actividad.

1. En equipos de 4 integrantes visiten un lugar cercano que cuente con vitrales, o consigan una fotografía donde se muestre alguno. (Anexen dicha fotografía).
   Obsérvenlos y consideren los puntos donde se unen las distintas piezas.

   a) ¿Qué ángulos se forman entre éstas para formar las distintas piezas? (Realiza la descripción haciendo notar todas las características que observan en ellos).

   ____

   ____

   ____

   b) ¿Qué propiedades tienen sus ángulos?

   ____

   ____

2. Investiguen la historia de los aviones supersónicos en la fuerza aérea de nuestro país, y describe el papel de los ángulos en el diseño de las alas de los aviones supersónicos.

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

3. ¿En qué otra área es de suma importancia, el uso de los ángulos? Describan la situación

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

Instrumento de evaluación

Lista de cotejo

Nombre: ____

Actividad: ____

Materia: ____

Grupo: ____________________ **Fecha de entrega:** ______________________

	Señala con una palomita el rubro que lograste realizar.
	Estructura
	1. Cuenta con la lista de cotejo impresa anexa a la actividad.
	2. La lista de cotejo presenta los datos de identificación del elaborador.
	Estructura interna (Selecciona una de las 3 opciones 3, 4 o 5)
	3. Tiene 100% de los cuestionamientos solicitados en la actividad.
	4. Tiene del 70% al 90% de los cuestionamientos solicitados en la actividad.
	5. Tiene el 50% de los cuestionamientos solicitados en la actividad.
	6. Cada cuestionamiento cuenta con los argumentos lógicos y coherentes.
	Contenido
	7. La actividad no presenta errores de ortografía.
	8. El reporte cuenta con inicio, desarrollo y cierre.
	9. El reporte cuenta con imágenes.
	Aportaciones propias
	10. El reporte está realizado en computadora y con limpieza.

Inicio

Secuencia didáctica 2
TRIÁNGULOS

De entrada

Al término de esta secuencia distinguirás los diferentes tipos de triángulos, así como las propiedades y las rectas notables de los triángulos.

Además recuperarás las siguientes competencias genéricas a través de sus atributos:

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos
  - Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.
  - Propondrás la forma de resolver problemas y asumirás una actitud constructiva con los conocimientos y habilidades que adquiriste.

Como producto principal construirás con la ayuda de un software libre las rectas notables de varios tipos de triángulos.

El triángulo es una de las figuras geométricas más utilizadas en el diseño gráfico, en la industria, en la construcción. Esto lo podemos apreciar en las diferentes edificaciones antiguas y modernas del hombre. Por ejemplo en la pirámide de Giza en Egipto, o la pirámide de Kukulkán en Chichén Itzá. El triángulo es un elemento fundamental de la geometría, es una figura fuerte muy socorrida en la ingeniería, la mecánica e incluso en las artes plásticas.

ACTIVIDAD 1
SD2-B1

En equipo de tres integrantes consigan varios popotes. Con los popotes construyan una pirámide cuyas paredes estén formadas por cuadrados de tal manera que con la cinta adhesiva vayan uniendo las caras cuadradas.

Con cuatro popotes formen un cuadrado poniendo cinta en sus vértices para unir los lados. Formen varios de estos cuadrados, para luego construir una pirámide con base a dichas figuras, de tal manera que la pirámide cuente por lo menos con cuatro pisos.

De la misma manera construyan una pirámide cuyas paredes estén formadas por triángulos. En tu cuaderno elaboren un reporte donde respondan a cada una de las siguientes preguntas:

a) Hagan algunas pruebas de resistencia. ¿Cuál de las dos pirámides se deforma más?
b) ¿Por qué creen que ocurre?
c) ¿En qué tipo de construcciones se utilizan estas figuras?

Atiende a la plenaria de resultados que tu profesor llevará a cabo en el aula para tu autoevaluación. Corrige los errores presentados y presenta el cuaderno al profesor para su revisión.

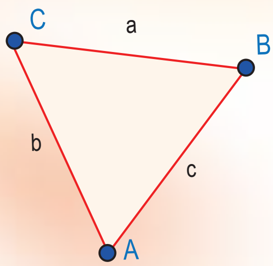
Desarrollo

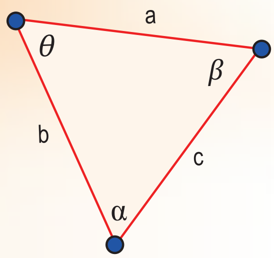
Definición de triángulo

Aquí estudiarás la forma en que una ecuación de primer grado con dos incógnitas puede relacionarse con la función lineal, para ello se realizarán una serie de actividades que te ayudarán a lograr la comprensión del tema, al resolver una ecuación con estas características a través de su gráfica.

Un **triángulo** es una superficie plana delimitada por tres lados, tres vértices, tres ángulos internos y tres externos. Los lados de un triángulo son segmentos de recta que se representan con letras minúsculas, mientras que los vértices se representan con letras mayúsculas como se muestra en la siguiente figura.

Observa que los lados a, b, c están colocados de tal manera que cada uno queda opuesto a su ángulo.



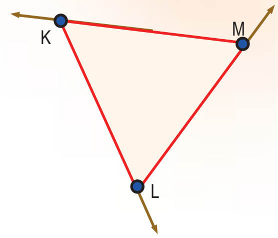


Los ángulos internos se nombran o bien con la misma letra del vértice o con las letras del alfabeto griego.

Uso de las TIC´S:

Usando el software de tu preferencia, realiza un mapa mental de la clasificación de los triángulos según la longitud de sus lados y amplitud de sus ángulos, pega en tu cuaderno para su revisión.

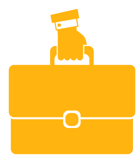
Los ángulos externos están formados por un lado del triángulo y la prolongación del lado adyacente. Observa cómo un ángulo externo de un triángulo es suplemento al ángulo interno correspondiente.



Para nombrar un triángulo se usa el símbolo Δ junto a las tres letras de los vértices, ejemplo Δ **ABC**.

ACTIVIDAD 2
SD2-B1

Guarda el ejercicio en tu portafolio de evidencias.



Organizados en equipos de tres integrantes consigan los siguientes materiales: una caja de picadientes o palillos y resistol blanco. En una hoja de su cuaderno construyan los siguientes triángulos que a continuación se solicitan.

Para ello considera las siguientes condiciones.

- Usen cada palillo como una unidad de medida, no pueden quebrar ninguno al momento de formar los triángulos.
- Pueden usar la cantidad de palillos por lado que ustedes decidan.
- Los triángulos tienen que estar perfectamente cerrados en sus vértices, sin que los palillos queden encimados entre sí.
- Una vez construido el triángulo, lo pegarán al cuaderno usando el Resistol.
- Cada integrante del equipo deberá tener la actividad en su cuaderno para su revisión.
- En caso de que la construcción no pueda ser llevada a cabo, argumenten las razones.
- Con un transportador medirán sus ángulos interiores, de igual manera determinarán las medidas de sus ángulos externos.

TIPO DE TRIÁNGULO	NÚM. DE PALILLOS POR LADO			MEDIDA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS			MEDIDA DE LOS ÁNGULOS EXTERNOS		
	1	2	3	A	B	C	A'	B'	C'
Isósceles-acutángulo									
Isósceles-obtusángulo									
Isósceles-rectángulo									
Equilátero-acutángulo									
Equilátero-obtusángulo									
Equilátero-rectángulo									
Escaleno-acutángulo									
Escaleno-obtusángulo									
Escaleno-rectángulo									

Haciendo un resumen de la actividad, en tu cuaderno responde a los siguientes cuestionamientos

1. ¿Qué triángulos fueron imposibles de construir? (Argumenten la razón)
2. De los triángulos que no pudieron construirse, consideran que si se agregan más palillos a los lados de los triángulos, ¿Éstos puedan ahora sí ser construidos? (Argumenten su respuesta)
3. Observen cada una de las construcciones que sí pudieron llevar a cabo y determinen: ¿Qué condición deben cumplir la longitud de los lados de un triángulo para que éste pueda ser construido sin problema?

Saber más...

TRIÁNGULO DE PENROSE
(Del artista M.C. Escher)

El triángulo de Penrose se define al tribar como una fi gura triangular en tres dimensiones imposible, porque su existencia está basada en uniones de sus lados formadas por elementos corrientes pero incorrectos. Aunque cada uno de los ángulos que forman este triángulo parece correcto, los tres son rectos y suman 270°.

Propiedades de los triángulos

Como te habrás dado cuenta en la actividad anterior existen propiedades o condiciones que se deben cumplir para la construcción de un triángulo.

1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
2) La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.
3) Un ángulo externo es igual a la suma de sus ángulos internos no adyacentes.
4) En un triángulo solamente puede haber un ángulo recto. Además, sólo puede existir un ángulo obtuso.
5) Cualquiera de los lados de un triángulo siempre será menor que la suma de los dos lados restantes.
6) En un triángulo rectángulo, la suma de los ángulos agudos es 90°.

ACTIVIDAD 3
SD2-B1

La práctica hace al maestro

Organizados en los mismos equipos de tres integrantes de la actividad anterior, lleven a cabo la verificación de las propiedades antes mencionadas en cada una de las construcciones realizadas. Para ello, utilicen los elementos necesarios del juego geométrico y anoten en cada una de las construcciones realizadas los cálculos que argumenten que la propiedad efectivamente se cumple. En la tabla que se anexa con una palomita indiquen la verificación de cada propiedad.

	Propiedades para la construcción de los triángulos					
Triángulo/Condición	1	2	3	4	5	6

ACTIVIDAD 4
SD2-B1

Organizados en equipos de tres integrantes nuevamente consigan una caja de palillos. Sin romper ninguno de los palillos construyan ahora triángulos rectángulos utilizando por cada lado la cantidad de palillos que sean necesarios.

1. En la siguiente tabla anoten la cantidad de palillos utilizados por lado.

	Lado 1	Lado 2	Lado 3
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			
Triángulo 4			
Triángulo 5			

2. De acuerdo a la longitud de los lados, ¿Qué tipo de triángulos rectángulo han construido?

3. En relación al número de palillos utilizados por lado, ¿Qué patrón observan en los triángulos construidos?

4. Con base al número de palillos usados por lado, ¿Qué características deben considerar en están construcciones para asegurar que los triángulos sean rectángulos?

5. Investiguen qué nombre recibe la terna de números que representan los lados de un triángulo rectángulo.

6. Ahora de la misma manera construyan un triángulo rectángulo isósceles, ¿Cuántos palillos se requieren para construirlos? En caso de que no pueda realizarse la construcción argumenten la razón.

7. ¿Qué condición debe satisfacer estas construcciones para poder realizarlas?

8. Anoten en la siguiente tabla las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos isósceles construidos, tomando en cuenta el planteamiento.

	Lado 1	Lado 2	Lado 3
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			
Triángulo 4			
Triángulo 5			

Rectas notables y sus puntos de intersección.

ACTIVIDAD 5
SD2-B1

Para llevar a cabo esta actividad necesitarás hojas blancas y un juego geométrico con compás. Organizados en binas, en una hoja blanca:

- ✓ Tracen un triángulo cuyos lados midan 13, 13.6 y 14 cm.
- ✓ Después encuentren los puntos medios de cada lado.
- ✓ Con la escuadra tracen una recta perpendicular a cada uno de los lados del triángulo y que pase por el punto medio de ese lado.
- ✓ Señalen el punto de cruce de las tres rectas.
- ✓ Con el compás fijo en el punto de cruce señalado y radio cualquiera de los vértices del triángulo, tracen una circunferencia.

Las rectas perpendiculares que cruzan el punto medio de cada lado del triángulo que acaban de trazar son las ***mediatrices*** del triángulo y el punto donde se cruzan se conoce como ***circuncentro***. Recibe este nombre, ya que, si observan la circunferencia trazada, ésta circunda al triángulo dado.

Ahora:

- ✓ Tracen un triángulo isósceles de 4, 4 y 5 cm.
- ✓ Encuentren los puntos medios de cada lado.
- ✓ Con una regla tracen un segmento de recta que una el punto medio de un lado con el vértice opuesto a dicho lado.
- ✓ Señalen el punto de cruce de los tres segmentos de rectas.

Los segmentos de recta que van del punto medio de cada lado del triángulo al vértice opuesto que acaban de trazar son las ***medianas*** del triángulo y el punto donde se cruzan se conoce como ***baricentro***.

ACTIVIDAD 6
SD2-B1

Guarda el ejercicio en tu portafolio de evidencias.

De manera individual busca información de las siguientes recta y puntos notables de los triángulos y anota en tu cuaderno la información encontrada.

- ✓ Altura.
- ✓ Bisectriz de un ángulo.
- ✓ Orto centro.
- ✓ Incentro.
- ✓ Recta de Euler.

Entrega a tu profesor(a) para su revisión.

Uso de las TIC´S:

Haciendo uso de la hoja de Geo Gebra o cualquier otro software, verifiquen las rectas y puntos notables del triángulo siguiendo las instrucciones de la actividad 7.

Logros

ACTIVIDAD 7

SD2-B1

Organizados en equipos de tres y haciendo uso de la hoja de Geo Gebra (software libre para graficar) o cualquier otro software, tracen sobre un **triángulo equilátero**:

- ✓ Las mediatrices.
- ✓ Las medianas.
- ✓ Las alturas.
- ✓ Las bisectrices.

- Tracen los puntos de intersección de tales rectas y escriban sus nombres.
- Sobre todos los puntos de intersección tracen la recta de Euler y escriban su nombre.
- Realiza los mismos trazos pero ahora sobre un triángulo, **isósceles** y un triángulo **rectángulo**.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué observan con respecto a la posición relativa del baricentro, orto centro, circuncentro e incentro en la recta de Euler en cada uno de los triángulos?

No olviden evaluar de manera individual su desempeño en esta actividad.

Instrumentos de evaluación

Para evaluar el logro de las competencias genéricas y disciplinar que las actividades te permitieron desarrollar, utiliza el siguiente: **cuadro de semaforización**, marcando el logro de dichas competencias con una palomita en el color correspondiente a tu desempeño.

Competencia genérica.		
5.1	Rojo	No propones la forma de resolver problemas y asumes una actitud de dependencia con tus compañeros de equipo, no demuestras conocimientos y habilidades.
	Amarillo	Asumes una actitud constructiva con los conocimientos y habilidades que adquiriste, pero no propones soluciones al problema.
	Verde	Propones la forma de resolver problemas y asumes una actitud constructiva con los conocimientos y habilidades que adquiriste.
Competencia disciplinar.		
1	Rojo	No construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de modelos aritméticos.
	Amarillo	Identifica algunos de los procedimientos aritméticos y/o gráficos para la comprensión y análisis de situaciones reales.
	Verde	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y/o geométricos.

AUTOEVALUACIÓN

Responde a las siguientes preguntas subrayando la respuesta correcta.

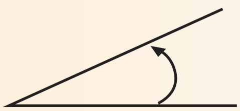
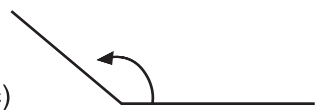
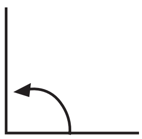
1. Es la abertura formada por dos semirectas con un mismo origen llamado vértice.
   b) Paralela.
   c) Plano.
   d) Ángulo.
   e) Perpendicular.

2. ¿Qué nombre recibe el sistema que permite medir un ángulo en grados?
   c) Decimal.
   d) Sexagesimal.
   e) Métrico.
   f) Radianes.

3. Además del grado, es otra unidad de medida que puede tener un ángulo.
   d) Horas.
   e) Decímetros.
   f) Longitud de arco.
   g) Radián.

4. ¿Cómo se escribe en el sistema sexagesimal el ángulo 25 horas 12 minutos y 36 segundos?
   e) 25° 12' 36'.
   f) 25° 12.36'.
   g) 25° 12' 36''.
   h) 25° 12'' 36'.

5. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a un ángulo agudo?

a)  b)  c)  d) 

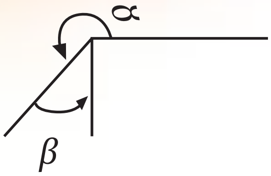
6. El ángulo que es mayor de un ángulo recto, pero menor de un ángulo llano, ¿se denomina?
   g) Perigonal.
   h) Agudo.
   i) Cóncavo.
   j) Obtuso.

7. ¿Cuál es el complemento del ángulo 57° 38' 18''?
   h) 32° 21' 41''.
   i) 32° 21' 42''.
   j) 32° 22' 42''.
   k) 33° 21' 41''.

8. ¿Cuál es el suplemento del ángulo de 134º?
   i) 46°.
   j) -44°.
   k) 146°.
   l) 226°.

9. Se tiene que los ángulos $y=2x-1$ y $z=3x+5$ son complementarios. ¿Qué medida tiene cada uno de los ángulos?
   j) y=34.4° y z=55.6°.
   k) y=33.4° y z=56.6°.
   l) y=32.4° y z=57.6°.
   m) y=32.6° y z=57.4°.

10. Si el valor del ángulo α es de 220º, ¿Cuál es el valor del ángulo β?
   k) 50°.
   l) 100°.
   m) 140°.
   n) 270°.



11. ¿Qué nombre recibe la figura geométrica delimitada por tres rectas, que se cortan en tres puntos diferentes?
   l) Cuadrado.
   m) Triángulo.
   n) Ángulo.
   o) Rombo.

12. ¿Qué nombre recibe el triángulo que tiene un ángulo de 90° y sus lados miden 3, 4 y 5 cm?
   m) Rectángulo-oblicuo.
   n) Rectángulo-isósceles.
   o) Rectángulo-escaleno.
   p) Rectángulo-equilátero.

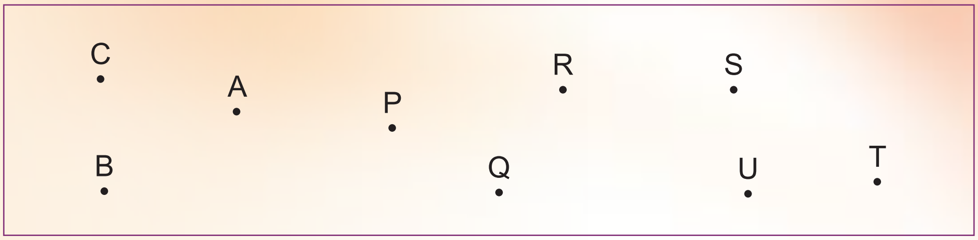
13. ¿Qué nombre recibe el triángulo que tiene sus tres ángulos agudos congruentes?
   n) Equilátero.
   o) Isósceles.
   p) Acutángulo.
   q) Escaleno.

14. Es el segmento de recta que va del punto medio del lado de un triángulo al vértice opuesto a dicho lado.
   o) Bisectriz.
   p) Mediatriz.
   q) Mediana.
   r) Altura.

15. En el siguiente triangulo: “el segmento de recta que parte del vértice C y que es perpendicular al lado”, se define como.
   p) Bisectriz.
   q) Mediatriz.
   r) Mediana.
   s) Altura.

COEVALUACIÓN

1. Tomando como referencia los puntos, traza los ángulos que se solicitan:



a) <ACB b) <PRQ c) <STU d) <CPS

2. Completa la tabla de acuerdo a la clasificación de los ángulos según su medida.

Tipo de ángulo.	Descripción.	Ejemplo.
Llano.		
Recto.		
Convexo.		
Obtuso.		
Cóncavo.		

3. Completa la tabla de acuerdo a la clasificación de los ángulos según la posición de sus lados y la suma de sus medidas.

Tipo de ángulo.	Descripción.	Ejemplo.
Adyacentes		
Opuestos por el vértice.		
Complementarios.		
Suplementarios		

4. Con la ayuda del transportador y las escuadras construye en el espacio siguiente ángulos de 25º, 135º, 45º, 123º, 180º, 90º, 190º, 0º, 270º, 330º, 360º. Anota, de acuerdo a las clasificaciones revisadas en el tema anterior, de que tipo es cada uno de ellos.

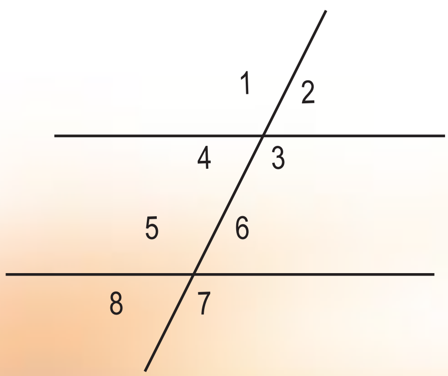
5. A partir de la figura que se anexa, determina las parejas de ángulos congruentes que se solicitan.

Ángulos correspondientes:
_<___ = _<___; _<___ = _<___;

_<___ = _<___; _<___ = _<___

Ángulos alternos internos:
_<___ = _<___; _<___ = _<___

Ángulos alternos externos:
_<___ = _<___; _<___ = _<___



6. Completa la tabla de acuerdo a la clasificación de los triángulos según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos.

Tipo de triángulo.	Descripción.	Dibujo de ejemplo.
Equilátero.		
Isósceles.		
Escaleno.		
Rectángulo.		
Obtusángulo.		

Instrumento de evaluación

Para evaluar el logro de las competencias genéricas y disciplinar que las actividades de este bloque te permitieron desarrollar, utiliza el siguiente **cuadro de semaforización**, marcando el logro de dichas competencias con una palomita en el color correspondiente a tu desempeño.

Competencia genérica.		
5.1	Rojo	No construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
	Amarillo	Tiene problemas para construir hipótesis y diseñar modelos matemáticos.
	Verde	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
Competencia disciplinar.		
1	Rojo	No construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de modelos aritméticos.
	Amarillo	Identifica algunos de los procedimientos aritméticos y/o gráficos para la comprensión y análisis de situaciones reales.
	Verde	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y/o geométricos.

Bloque 2

Resuelve triángulos: congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

Desempeño del estudiante
¿Cómo lo aprenderé?

- Utilizando los criterios de congruencia para establecer si dos triángulos son congruentes entre sí.
- Argumentando la aplicación de los criterios de semejanza.
- Aplicando los teoremas de Tales y Pitágoras.
- Resolviendo ejercicios y problemas del entorno con los teoremas de Tales y Pitágoras.

Objetos de aprendizaje
¿Qué aprenderé?

- Criterios de congruencia y semejanza.
- Teoremas de Tales y Pitágoras.

Competencias disciplinares a desarrollar
Me servirá para:

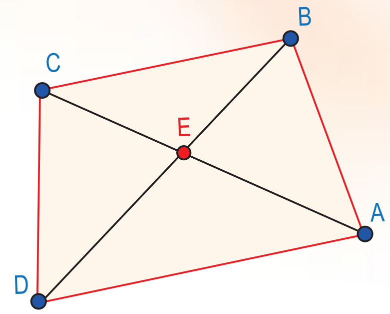
- Expresar ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Construir hipótesis, diseñar y aplicar modelos para probar su validez.
- Utilizar tecnologías de la información y la comunicación para procesar e interpretar información.

Tiempo Asignado: 12 horas

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Instrucciones: Lee detenidamente los siguientes planteamientos y reflexiona sobre el procedimiento que te permita obtener las soluciones. Realiza tu trabajo con orden y limpieza.

I. En la siguiente figura el segmento $\overline{CB}$ es paralelo con $\overline{DA}$ ($\overline{CB}$ // $\overline{DA}$), los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto E. Contesta las tres preguntas siguientes subrayando la respuesta que es correcta con base a esta información.

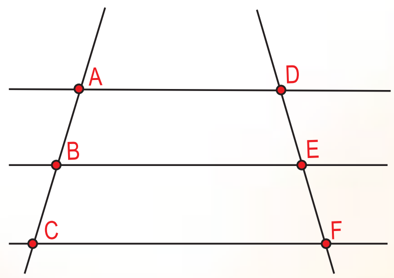


1. El <CEB y<DEA son congruentes debido a que son:
   - b) Ángulos complementarios.
   - c) Ángulos alternos internos.
   - d) Ángulos alternos externos.
   - e) Ángulos opuestos por el vértice.

2. ¿Qué par de ángulos son suplementarios?
   - c) <CEB y <CDE
   - d) <CDE y <EDA
   - e) <EBA y <EAD
   - f) <CED y <DEA

3. El <BCE y<EAD son congruentes. ¿En qué opción se expresa la razón?
   - d) Son ángulos alternos externos.
   - e) Son ángulos alternos internos.
   - f) Son ángulos opuestos por el vértice.
   - g) Son ángulos correspondientes entre paralelas.

II. Encuentra la longitud faltante en el siguiente diagrama:



$\overline{AB}$ =3 cm

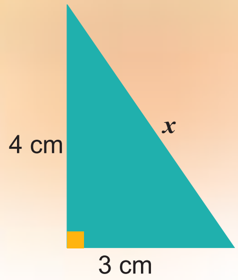
$\overline{BC}$ =2 cm

$\overline{DE}$ =2.5 cm

$\overline{EF}$ $=x$

III. Calcula el área de un triángulo equilátero en el que la longitud de sus lados es de 20 cm.

IV. Determina la medida del lado “x” en la siguiente figura.



V. En una fotografía, María y Fernando miden 2.5 cm y 2.7 cm, respectivamente. En la realidad, María tiene una altura de 167.5 cm.

a) ¿A qué escala está hecha la foto?

b) ¿Qué altura tiene Fernando en la realidad?

Atiende y participa en la plenaria de resultado para tu autoevaluación. Entrega a tu profesor(a) para su revisión.

Inicio

Secuencia didáctica 1

RESUELVE PROBLEMAS UTILIZANDO CRITERIOS DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA.

De entrada

Al término de esta secuencia podrás realizar actividades en las que aplicarás los criterios y conceptos de congruencia y semejanza de los triángulos para resolver problemas. Además clasificarás cualquier ángulo con respecto a la posición de sus lados y comprenderás la relación de igualdad que existe entre los elementos de los triángulos congruentes; así como la relación de proporcionalidad que existen entre los lados de los triángulos semejantes.

De estas actividades obtendrás las siguientes evidencias de aprendizaje: la aplicación de la congruencia de triángulos en situaciones teóricas, el cálculo de los lados de un triángulo a partir de los datos conocidos en triángulos semejantes. Resolución de problemas reales en los que se requiera de los criterios de semejanza.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

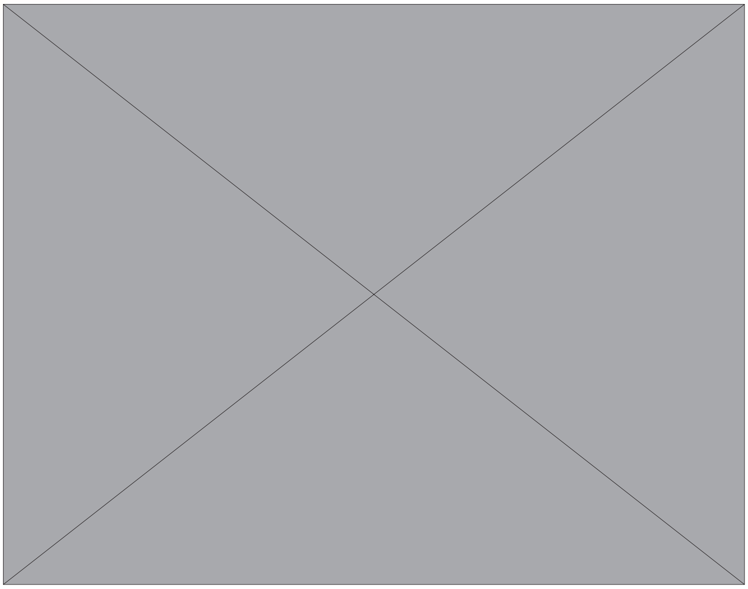
- Expresas ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas o gráficas.
    - o Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.
    - o Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Además como producto principal, mediante un reporte de investigación podrás determinar la importancia del uso de los criterios de semejanza para el cálculo de distancias inaccesibles.

Los estudiantes de primer semestre de arquitectura, en una universidad han construido una estructura a base de rollos de papel reciclado, para demostrar que es posible conseguir ***estructuras resistentes*** a partir de materiales que en un principio nos pueden parecer que no lo son.

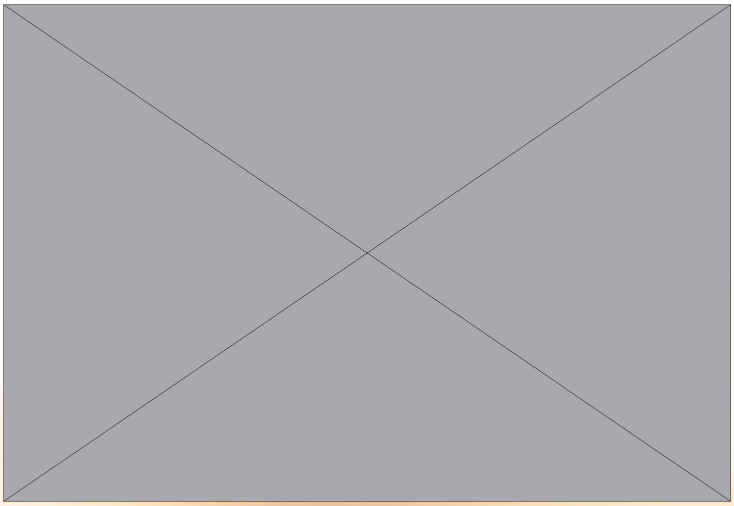
El planteamiento del proyecto fue diseñar y construir una estructura que soportase su propio peso, a partir de un material como el papel.

En uno de los equipos, éste fue el resultado:



La estructura se encuentra formada por triángulos como se muestra en la imagen.

La prueba de fuego era que resistiera el peso de uno de los estudiantes del equipo:



Éste equipo superó la prueba.

ACTIVIDAD 1
SD1-B2

En equipos de tres integrantes, reflexionen y respondan a las siguientes preguntas.

1. ¿Por qué en la arquitectura se utiliza el triángulo como estructura?

____

____

____

2. Para elaborar la estructura mostrada en la fotografía, ¿qué tipo de triángulos debe utilizarse?, ¿Por qué?

____

____

____

3. ¿Creen que otro tipo de triángulo podría proporcionar la misma resistencia? (Argumenten su respuesta).

____

____

____

____

____

Proporcionen la actividad a su profesor(a) para su revisión.

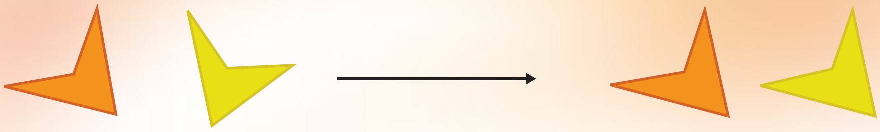
Desarrollo

Definición de congruencia

En esta secuencia estudiaremos los criterios de congruencia y semejanza de triángulos. Para ello es necesario que comencemos por definir a qué refiere el término **congruencia** con respecto de las figuras geométricas planas.

Dos figuras son **congruentes** si al colocar una sobre la otra todos sus puntos coinciden, es decir, si ambas figuras tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Para denotar la congruencia entre dos figuras se utiliza el símbolo "≅", donde el símbolo "~" indica igualdad en la forma y "=" indica igualdad en el tamaño.



ACTIVIDAD 2
SD1-B2

La actividad se realizará de manera individual. Vas a necesitar hojas de papel de color naranja y amarillo, tijeras, regla y transportador.

Sobre la hoja naranja traza un triángulo, un lado medirá 10 cm y los ángulos adyacentes a dicho lado tendrán un valor de 40° y 30° cada uno.

Ahora traza en la hoja amarilla un triángulo cuyos lados midan 10, 5.2 y 6.9 cm, respectivamente.

Recorta los dos triángulos y empálmalos.

a) ¿Qué ocurrió cuando empalmaste las figuras?

____

____

____

b) ¿Qué coincidencias hubo entre ambos triángulos?

____

____

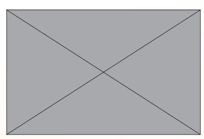
____

Como podrás observar en la actividad anterior, dos figuras son congruentes cuando son exactamente iguales en forma y tamaño. Podemos decir que la congruencia se manifiesta en diferentes situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, cuando un arquitecto desarrolla una maqueta de una vivienda o un conjunto habitacional tienen que tomar en cuenta el concepto de congruencia para que todas las cosas se vean iguales.

En la geometría se dice que dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud. Asimismo, dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

La congruencia de los triángulos se utiliza para diseñar ejercicios de comparación en juegos de salón, en el trazo de señales y gráficos

Glosario

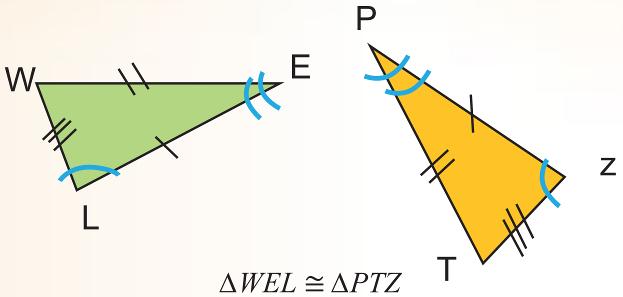


Pantógrafo: Instrumento que sirve para copiar dibujos aumentando o disminuyendo su tamaño, basado en paralelogramos articulados.

de localización para el tránsito vehicular, en el diseño de mecanismos que permiten la operación de las fotocopiadoras o en un pantógrafo, entre muchas otras cosas.
Proporciona la actividad a tu profesor(a) para su revisión.

Criterios de congruencia de triángulos

Cuando encuentres un par de triángulos congruentes y quieras identificar los lados y ángulos que coinciden, es más fácil hacerlo si se colocan sobre cada uno de ellos una, dos o tres rayitas para identificarlos.

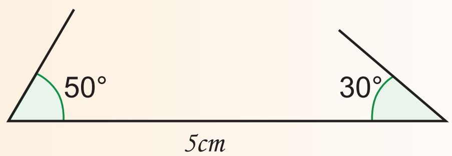


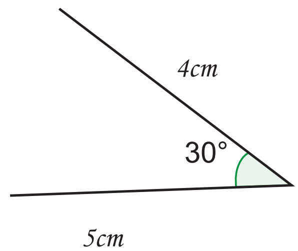
$\Delta WEL \cong \Delta PTZ$

ACTIVIDAD 3
SD1-B2

Ésta actividad se llevará a cabo de manera individual. Ahora vas a necesitar hojas cuadriculadas, transportador, regla y escuadras.

Construye dos triángulos con los segmentos y los ángulos que se indican en cada figura.





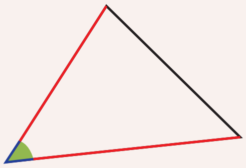
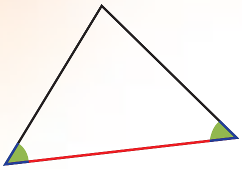
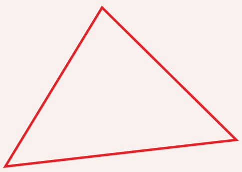
a) ¿Cuál es la medida de los tres ángulos de los dos triángulos?

b) ¿Cuál es la longitud de los lados de cada uno de los triángulos?

c) ¿Qué relación existe entre los dos triángulos?

En plenaria comenta con el grupo tus afirmaciones y lleguen a una conclusión entre todos. En caso de error en tus respuestas corrige la actividad y proporciona el libro a tu profesor(a) para su revisión.

Para determinar la congruencia entre dos triángulos cualquiera sólo necesitan tres elementos determinados de cada uno de ellos. A partir de estos elementos definimos los siguientes criterios de congruencia:

CRITERIOS DE CONGRUENCIA	
	**LAL** (Lado, Ángulo, Lado) Dos triángulos son congruentes si dos lados de un triángulo tienen la misma longitud de que dos lados del otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida.
	**ALA** (Ángulo, Lado, Ángulo) Dos triángulos con congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente. (El lado comprendido entre dos ángulos es el lado común a ellos)
	**LLL** (Lado, Lado, Lado) Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.

ACTIVIDAD 4
SD1-B2

De manera individual, en tu cuaderno construye dos triángulos que tengan dimensiones diferentes en sus lados, pero ambos con los siguientes ángulos interiores <A=37°, <B=53° y <C=90° y responde a las siguientes preguntas.

1. ¿Qué relación presentan los lados de ambos triángulos?
2. ¿Cuál es la razón del triángulo más grande con respecto al triángulo más pequeño?
3. ¿Qué operación tuviste que realizar para obtener la respuesta a la pregunta 2?
4. ¿La razón es la misma para todos los lados del triángulo?
5. ¿Qué significa el número obtenido en la pregunta 2?
6. Menciona otra situación de tu entorno, donde se refleje la misma situación que la observada en esta actividad. Describe la similitud encontrada.

Entrega a tu profesor(a) para su revisión.

En tus actividades diarias puedes percibir figuras semejantes, en el aula misma inclusive. Por cuando observas un cuaderno pequeño que normalmente se usa para notas, que es igual en la forma a un cuaderno normal tamaño carta. O bien, cuando observas un mapa, la escala correspondiente da una idea exacta de la distancia que existe entre dos puntos. Cuando tomas una fotografía de un objeto, la imagen que captas está a escala con respecto al objeto fotografiado.

Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño. Es decir, que una de las figuras es una copia a escala de la otra. El símbolo para denotar semejanza es “~” que indica igual forma.

ACTIVIDAD 5
SD1-B2

1. Observa las dos fotografías, mide sus dimensiones (largo y ancho) y anota abajo que proporción existe entre ambas.

_______________________ _______________________________________

2. Tomen con el celular una fotografía de uno de ustedes de cuerpo entero, compárenla con la estatura real (en metros) y determinen la escala de la fotografía.
3. Comparen sus resultados con otros compañeros y lleguen a una conclusión por qué hay diferencias entre la escala que obtuvieron y la obtenida por tus compañeros.

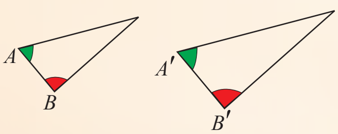
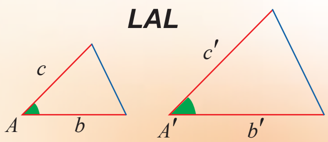
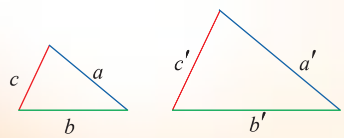
Dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos son congruentes (Igual en medida), y sus lados correspondientes son proporcionales.

Al cociente (división) formado por el valor de estos lados se denomina **razón de semejanza**.

El hecho de que los ángulos sean congruentes entre dos triángulos garantiza que éstos tengan la misma forma; y la proporcionalidad constante entres sus lados correspondientes, garantiza la diferencia de tamaño entre ellos.

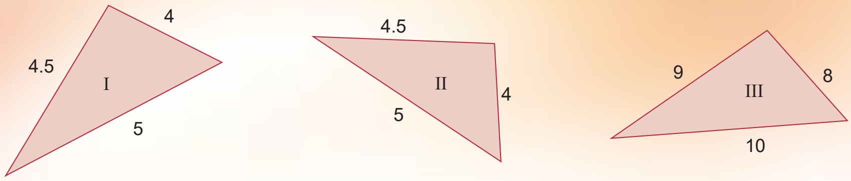
Al igual que en el caso de congruencia, para indicar a los lados correspondientes de los triángulos marcaremos con líneas los lados semejantes.

Criterios de semejanza.

1er Criterio	2° Criterio	3° Criterio
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes. ***ALA O AA***  $< A = < A' y < B = < B'$	Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente y los lados que lo forman son proporcionales. ***LAL***  $< A = < A' y \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$	Dos triángulos son semejantes si tienen tres lados proporcionales. ***LLL***  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

ACTIVIDAD 6
SD1-B2

Organizados en binas, midan los ángulos de los siguientes triángulos y respondan las siguientes preguntas.



a) ¿Cuáles son triángulos congruentes? (Justifiquen su respuesta).

____

____

b) ¿Cuáles son triángulos semejantes? (Justifiquen su respuesta).

____

____

c) Identifiquen los lados correspondientes y anoten la razón de proporcionalidad entre cada uno.

____

____

d) ¿Cómo son sus ángulos correspondientes?

____

____

____

Uso de las TIC´S:

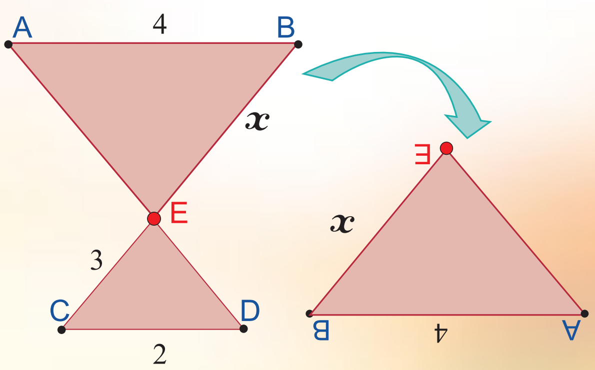
En equipos de 3 integrantes, investiguen en internet cómo se aplica el concepto de semejanza en la arquitectura y en la publicidad. Desarrollen una presentación en máximo 4 diapositivas y envíelas a su profesor(a)

Los criterios de semejanza se utilizan en distintos tipos de problemas que requieren determinar la longitud de los lados de los triángulos involucrados.

Ejemplo 1.

Encuentra el valor de la incógnita en los siguientes triángulos.

Como no se da por hecho que los triángulos son semejantes, se tiene que verificar primeramente que lo son.



$< EBA = < ECD$
Por ser alternos internos entre paralelas.

$< BAE = < EDC$
Por ser alternos externos entre paralelas.

$< AEB = < CED$
Por ser opuestos por el vértice.

Así concluimos que los triángulos AEB y CED son semejantes.

Para resolver este problema es preciso que consideres que los lados correspondientes son aquellos que son proporcionales, así que lo primero que debemos hacer es identificarlos. Para que sea más notoria la correspondencia entre los lados hemos girado uno de los triángulos de manera que ambos tengan la misma posición. De esa manera se aprecia mejor la congruencia de los ángulos así como la correspondencia de los lados.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

Observa que hemos colocado los lados del triángulo más grande en los numeradores de la proporción y en el denominador los del triángulo más pequeño, aunque también puede establecerse al revés, es decir, poner en el numerador de la proporción los segmentos del triángulo más chico y en los denominadores los segmentos del triángulo mayor.

Lo que no se permite es combinar los segmentos del triángulo chico y grande en el numerador de las proporciones.

Volviendo al problema, sustituimos en la proporción los valores de los lados dados.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{4}{2}$$

Resolviendo la proporción (multiplicando de manera cruzada) se tiene.

$$2x=(3)(4)$$

$$2x=12$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{12}{2}$$

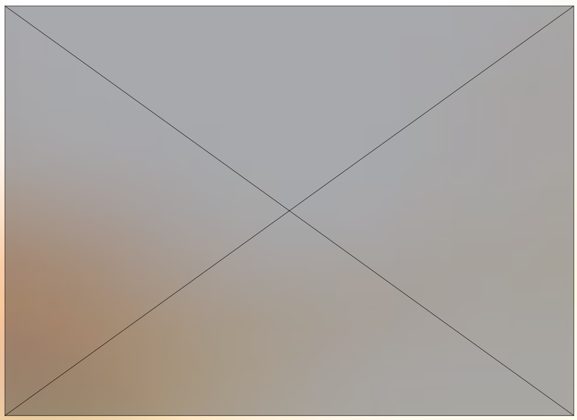
$$x=6.$$

Por lo que el valor de la incógnita es 6.

Ejemplo 2.

Un árbol proyecta una sombra de 3m; al mismo tiempo una vara de 1.4 m de altura proyecta una sombra de *60 cm*, ¿Cuál es la altura del árbol?

Para resolver este problema es necesario hacer un planteamiento gráfico de la siguiente manera:



Ambos triángulos tienen la misma forma y diferente tamaño, ambos son triángulos rectángulos. Por lo que podemos deducir que son triángulos semejantes por el criterio ***ALA***, puesto que ambos tienen un ángulo recto y el mismo ángulo de inclinación del sol. Para trabajar con unidades de medida equivalentes hemos hecho el cambio de centímetros a metros, entonces podemos usar la proporcionalidad de semejanza entre ellos:

$$\frac{x}{1.4} = \frac{3}{.6}$$

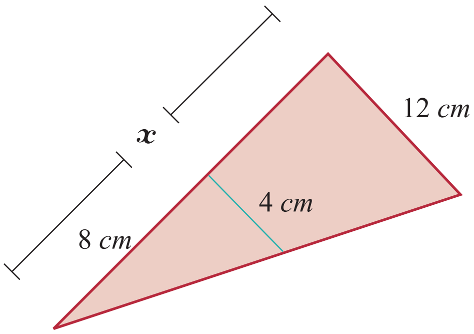
Resolviendo la proporción (multiplicando de manera cruzada) se tiene.

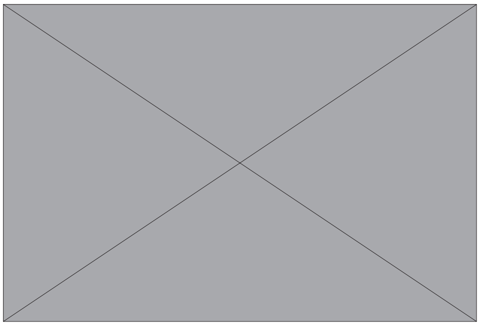
$$6x = (1.4)(3)$$
$$6x = 4.2$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{4.2}{6}$$
$$x=7$$

Luego concluimos que el árbol tiene 7 m de altura.

Ejemplo 3.

Un policía llega a la escena del crimen y encuentra una huella del que supone podría ser un sospechoso. Para preservar la evidencia toma una fotografía, pero como sabe que el tamaño de la huella es fundamental para acusar al sospechoso, coloca a su lado un billete de $20 que le permita establecer una comparación más tarde. Al medir la huella y el billete en la fotografía, el policía estableció que tienen una longitud de 8 y 4 cm respectivamente. Por otro lado los billetes de $20 tienen una longitud real de 12 cm. Con esos datos, ¿Cuánto mide la huella del zapato?





Resolviendo se tiene.

$$\frac{x}{8} = \frac{12}{4}$$
$$4x=(8)(12)$$
$$4x=96$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{96}{4}$$
$$x=24 \text{ cm.}$$

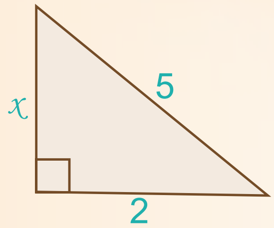
Por lo que la huella del sospechoso mide 24 cm.

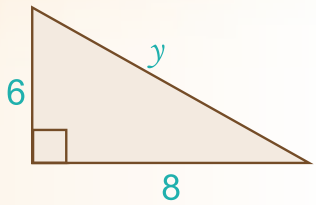
La práctica hace al maestro

ACTIVIDAD 7
SD1-B2

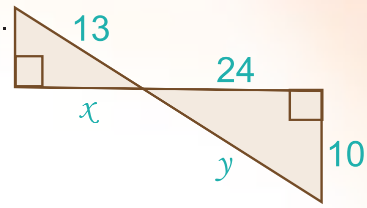
De manera individual resuelve los siguientes ejercicios.
Encuentra el valor de las incógnitas en los siguientes triángulos semejantes.

1.

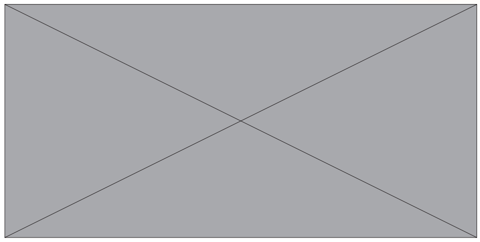




2.



3. Para encontrar el ancho "x" de un río, un topógrafo utiliza triángulos semejantes para determinar su longitud como se muestra en la figura. Las distancias de los segmentos que determinó en tierra son las siguientes:
$BC=30\ m$, $BD=16\ m$ y $DE=12\ m$.



4. Calcula la altura de un edificio, si su sombra tiene una longitud de $6\ m$, sabiendo que a esa misma hora un árbol de $2.5\ m$ de altura proyecta una sombra de $1.8\ m$.

5. Un poste telefónico proyecta una sombra de $2\ m$, en el mismo momento en que una vara de $1.5\ m$ proyecta una sombra de $60\ cm$. Determina la altura del poste.

Logros

Guarda el ejercicio en tu portafolio de evidencias.

ACTIVIDAD 8
SD1-B2

Organícense en equipos de cuatro integrantes, cada equipo trazará en una hoja tamaño carta las siguientes figuras geométricas: triángulo escaleno, triángulo isósceles, triángulo rectángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio o rombo.

Dividan la figura sucesivamente hasta indicar cuántos triángulos congruentes se pueden formar. No hay límite para la cantidad de cortes o divisiones que pueden hacer. Se debe obtener la cantidad máxima de triángulos congruentes.

Contesten a las siguientes preguntas.

1. Los triángulos obtenidos en cada figura ¿Son congruentes? ¿Por qué? (Utilicen los criterios de congruencia para argumentar sus respuestas).

   ____

   ____

   ____

2. ¿En qué figura geométrica se construyeron más triángulos congruentes?

   ____

   ____

3. ¿A qué creen que se deba la diferencia en la cantidad de triángulos congruentes construidos en cada figura geométrica?

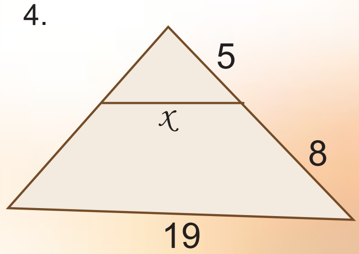
   ____

   ____

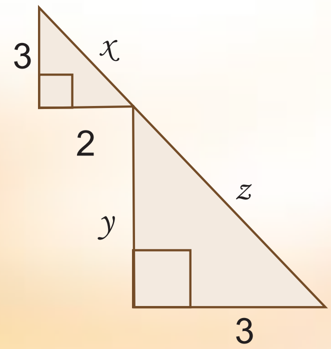
   ____

Instrucción: Utilizando la semejanza de triángulos, deducir los valores de las incógnitas en cada caso.

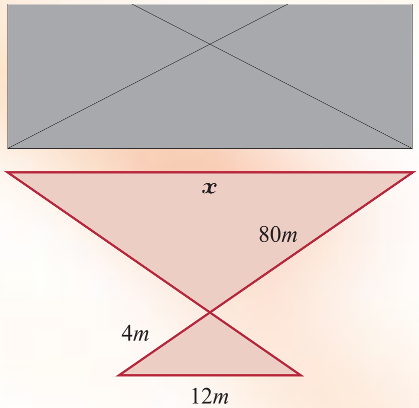
4.



5.



6. Un ingeniero realizó el siguiente diagrama para calcular el largo de un lago. Encuentra el valor de x.



7. Determina la altura de un poste de luz que a cierta hora del día arroja una sombra de $2.55\ m$, en ese preciso momento Martha que mide $1.58\ m$ arroja una sombra de $1.06\ m$.

8. Gerardo desea calcular la altura de un edificio, para lograr lo solicitado utilizará la técnica del espejo. Para ello coloca un espejo sobre el suelo a 12.5 m de la base del edificio, de tal, manera que Edgar que mide 1.92 m colocado a .85 m de distancia del espejo, logra ver sobre el espejo el reflejo de la punta del edificio. ¿Qué altura tiene el edificio?

Instrumento de evaluación

Señala con una palomita el color que describe tu desempeño en esta actividad.

Competencia genérica.		
5.1	(rojo)	No construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
	(amarillo)	Tiene problemas para construir hipótesis y diseñar modelos matemáticos.
	(verde)	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
Competencia disciplinar.		
1	(rojo)	No construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de modelos aritméticos.
	(amarillo)	Identifica algunos de los procedimientos aritméticos y/o gráficos para la comprensión y análisis de situaciones reales.
	(verde)	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y/o geométricos.

Inicio

Secuencia didáctica 2

RESUELVE PROBLEMAS APLICANDO LOS TEOREMAS DE TALES Y PITÁGORAS.

De entrada

Al término de esta secuencia podrás identificar, construir y resolver problemas mediante los teoremas de Tales y Pitágoras.

De estas actividades obtendrás como evidencias de aprendizaje la deducción del Teorema de Pitágoras, la expresión algebraica que lo representa y la aplicación para resolver problemas cotidianos en diversas situaciones. Así como la aplicación del teorema de Tales.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos

    - Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

    - Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

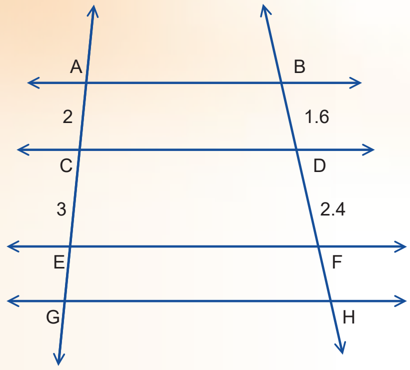
Como producto principal, podrás resolver varias situaciones de nuestro entorno donde, para encontrar respuesta, se requiera el uso del Teorema de Pitágoras.

ACTIVIDAD 1

SD2-B2

Con base en el siguiente dibujo contesta.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH}$



1. ¿Cuánto miden los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{FH}$?

2. ¿Qué relación existe entre $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$?

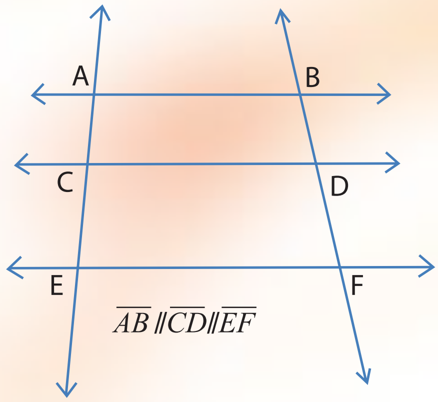
3. ¿Y entre $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$?

4. Propón valores para los segmentos $\overline{EG}$y $\overline{FH}$ respectivamente, de tal manera que conserven la misma relación que los segmentos anteriores.

Desarrollo

En la actividad de inicio encontraste que la relación existente entre las longitudes de los segmentos formados por las transversales y las paralelas son proporcionales entre sí.

Una vez visto lo anterior podemos enunciar el teorema de Tales.

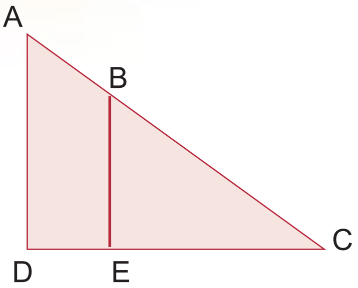


Si dos rectas (secantes o transversales) se cortan por un sistema de rectas paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos de intersección sobre una de las secantes.

Es decir:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$

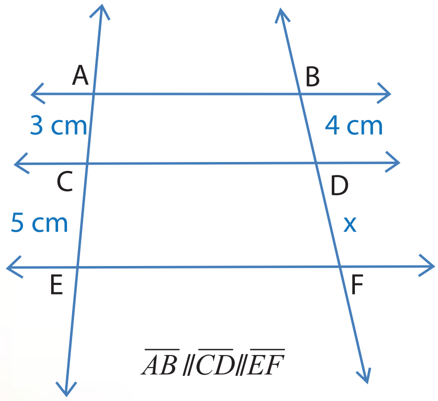
Este teorema también aplica cuando en un triángulo cualquiera se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, con lo que se forma un triángulo semejante al original.



$$\Delta ADC \sim \Delta BCE$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}$$

Ejemplo 1.



Encuentra la medida del segmento $\overline{DF}$.
Como tenemos dos rectas secantes cortadas por un sistema de tres rectas paralelas, los segmentos que se determinan entre las secantes son proporcionales por lo que, por el teorema de Tales tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$

Al sustituir las medidas obtenemos:

$$\frac{3}{5}=\frac{4}{x}$$

Resolviendo la proporción (multiplicando de manera cruzada) se tiene.

$$3x=(4)(5)$$
$$3x=20$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{20}{3}$$
$$x=6.66\ cm.$$

Luego concluimos que el $\overline{DF}=6.66\ cm.$

Ejemplo 2.

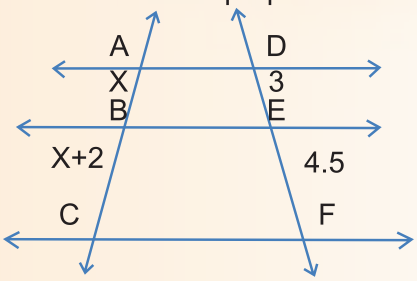
De la figura anterior determina el valor de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
Utilizando el teorema de Tales tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$

Sustituimos las medidas:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4.5}$$

Resolvemos la proporción



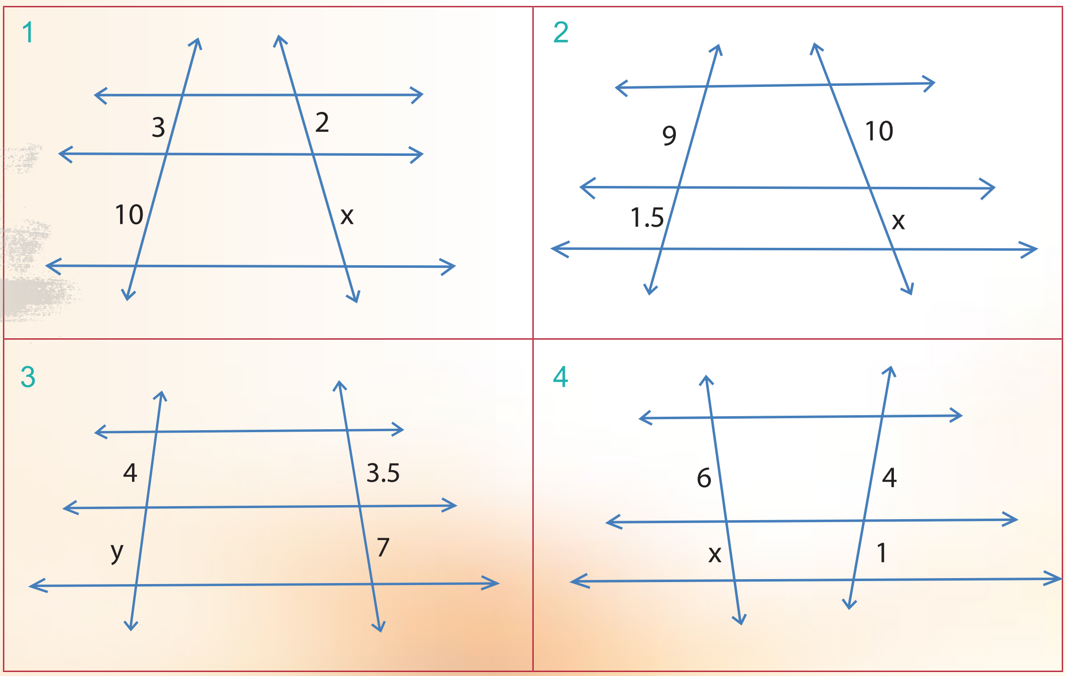
$$4.5x=(3)(x+2)$$
$$4.5x=3x+6$$
$$4.5x\text{-}3x=6$$
$$1.5x=6$$
$$\frac{1.5x}{1.5} = \frac{6}{1.5}$$
$$x=4.$$

Luego concluimos que los segmentos $\overline{AB}$ $= 4$ y $\overline{BC} = 6$.

ACTIVIDAD 2

SD2-B2

Encuentra los valores de la incógnita en las siguientes figuras compuestas por un sistema de rectas paralelas y 2 secantes.



Deduce el teorema de Pitágoras y la expresión algebraica que lo representa.

ACTIVIDAD 3
SD2-B2

Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados que forman el ángulo recto miden 3 y $4\ cm$ y el lado mayor (opuesto al ángulo recto) mide $5\ cm$. Se pueden construir triángulos semejantes a este, buscando que sus lados homólogos (correspondientes) sean proporcionales, lo cual se consigue al duplicar, triplicar, cuadruplicar, sacando mitad, tercera, etc., a las medidas de los tres lados, es decir considerando los múltiplos o submúltiplos de las medidas de los lados.

Organizados en binas, a partir de las medidas dadas del triángulo mencionado en el párrafo anterior propongan triángulos semejantes a éste y llenen cada columna de la siguiente tabla; después respondan a las preguntas planteadas.

Triángulo	Medida de los lados que forman el ángulo recto.		Medida del lado mayor	Dibujo del triángulo, incluyendo cuadrados construidos en sus lados.	Constante de proporcionalidad con respecto al primer triángulo.	Área de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto.		Suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto.	Área del cuadrado construido sobre el lado mayor.
Primero	**3**	**4**	**5**		**No aplica**	**9**	**16**	**9+16=25**	**25**
Segundo	6		10						
Tercero	9	12							
Cuarto		20	25						
Quinto	1.5		2.5						

sexto	0.75	1							
Séptimo		0.8	1						
Cualquier triángulo rectán-gulo	a	b	c						

a) ¿Qué significado tiene la constante de proporcionalidad obtenida?

b) ¿Cómo son los resultados de las últimas dos columnas?

c) Para cualquier triángulo rectángulo (última fila) ¿Qué expresión algebraica resulta al considerar las últimas dos columnas?

d) ¿Cómo podrían expresar verbalmente o en lenguaje común la expresión algebraica anterior?

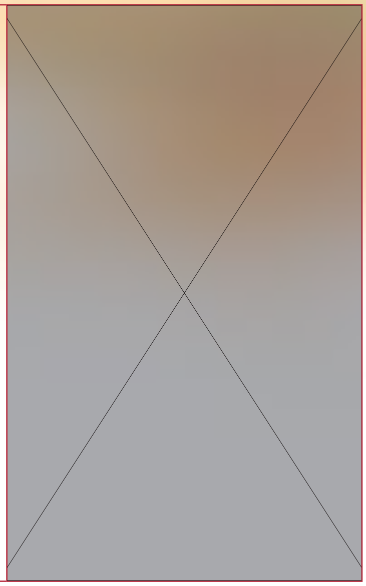
e) Si llamamos catetos a los lados que forman el ángulo recto e hipotenusa al lado mayor, ¿Cómo expresarían verbalmente la expresión algebraica obtenida?

f) Observen el dibujo y la expresión algebraica, si les faltara el lado mayor (hipotenusa), ¿Qué harían para obtenerla? Escriban la expresión algebraica correspondiente.

g) Observen el dibujo y la expresión algebraica, si les faltara uno de los lados que forman el ángulo recto, es decir, uno de los catetos ¿Qué harían para obtenerlo? Escriban la expresión algebraica correspondiente para cada cateto.

¿Quién fue?

Pitágoras de Samos, fue un filósofo y matemático griego, discípulo de tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. En el año 530 a.C., fundó el Pitagorismo, un movimiento religioso, político y filosófico. Uno de los descubrimientos matemáticos que se atribuyen a Pitágoras es el Teorema de Pitágoras, no obstante, la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, ya se conocía desde hace varios siglos por los babilonios.



Verificando las fórmulas deducidas para el Teorema de Pitágoras

ACTIVIDAD 4
SD2-B2

A continuación y organizados en binas, verifiquen si las fórmulas obtenidas en la actividad anterior, para encontrar la hipotenusa o cualquiera de los catetos, se cumplen para cada uno de los triángulos rectángulos construidos en la tabla, aplicándolas directamente, es decir, sin seguir el procedimiento descrito en la tabla. Si al aplicarlas obtienen los mismos resultados de la tabla, entonces podrán utilizar las fórmulas establecidas para encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo conociendo dos de sus lados; de lo contrario, tendrán que reflexionar de nuevo en las respuestas a las preguntas de la actividad anterior hasta conseguir que los resultados coincidan con los de la tabla.

Triángulo Rectángulo.	Dimensiones conocidas (medidas de lados conocidas).			Aplicación de la expresión algebraica obtenida (fórmula) para obtener el lado faltante.	¿Coinciden los resultados obtenidos con los de la tabla? Marca con una palomita.	
	a	b	c		Si	No
Segundo	6		10	b=		
Tercero	9	12		c=		

Cuarto		25	26	a=		
Quinto	1.5		2.5	b=		
Sexto	0.75	1		c=		
Séptimo		0.8	1	a=		

Si los resultados coinciden, entonces apliquen las fórmulas para resolver los siguientes problemas.

La práctica hace al maestro

ACTIVIDAD 5
SD2-B2

En binas trabajen en su cuaderno el planteamiento de los siguientes problemas, para ello elaboren un dibujo y resuelvan.

1. Al comprar una escalera de 12 metros de longitud, se le advierte al comprador que lo más cercano que debe estar el pie de la escalera del muro vertical donde se recargará es de 2.8 metros, si se acerca más, pierde estabilidad y quien la suba podría sufrir un grave accidente. Bajo esta condición de seguridad, ¿Cuál es la altura máxima aproximada que puede alcanzar la escalera al recargarla sobre el muro? Has un bosquejo que represente el problema.
2. Un padre de familia desea comprar alambre para sostener el poste de su antena de televisión, el cual mide 6 metros; su propósito es fijar un extremo del alambre a la parte superior del poste y el otro extremo a un punto que se encuentra a nivel del techo (el cual no tiene inclinación, es decir es plano), y a 3 metros de la base del poste. ¿Cuál es la cantidad mínima de alambre que debe comprar?
3. Un truco utilizado por los albañiles para escuadrar un terreno consiste en medir 30 y 40 cm a los lados del mismo a partir de una de las esquinas y poner marcas con cal o una raya en el suelo con el dedo o una vara; después comprueban que la distancia entre las marcas sea de 50 cm. Ellos sin saberlo están aplicando el Teorema de Pitágoras. Justifica mediante este Teorema el procedimiento utilizado por los albañiles.

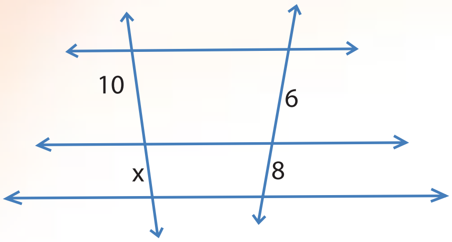
Glosario

Escuadrar: Es un proceso mediante el cual los albañiles y otros artesanos verifican que el ángulo que se forma entre dos segmentos o superficies es de 90°.

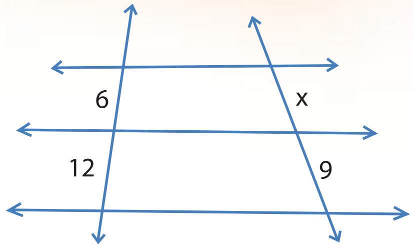
Cierre

Guarda esta actividad en tu Portafolio de evidencias.

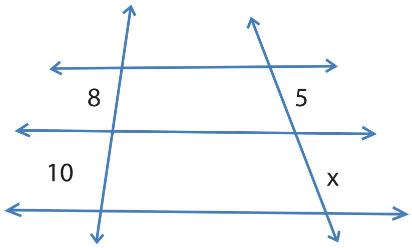
I. En tu cuaderno y de manera individual, aplica el teorema de Tales, encuentra las longitudes de los segmentos que se indican. Para ello considera que las rectas que cortan al par de secantes son paralelas.



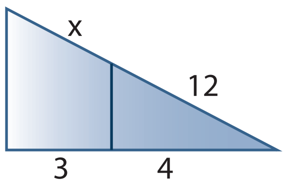
1.



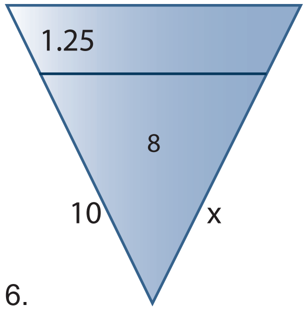
2.



4.



5.



6.

II. Resuelve los siguientes problemas utilizando el Teorema de Pitágoras.

1. Dados los valores de los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el valor de la hipotenusa:

Catetos (en cm)		Hipotenusa (en cm)
a= 3	b= 4	c=
a= 12	b= 5	c=
a= 25	b= 18	c=
a= 3.5	b= 2.4	c=
a= 5	b= x-1	c=

2. Dados los valores de la hipotenusa y de un cateto de un triángulo rectángulo, calcular la medida del otro cateto

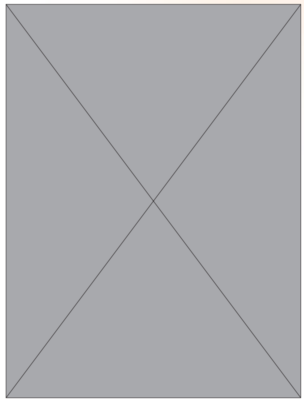
Cateto (en cm)	Hipotenusa (en cm)	Cateto (en cm)
a=15	c=17	b=
a=40	c=41	b=
b=7	c=25	a=
b=0.20	c=0.29	a=
b=17	c=26	a=
a=7.5	c=11.6	b=

3. Calcular la altura de un triángulo isósceles, si su base mide 60 cm y cada uno de los lados iguales mide 50 cm.

4. Calcular la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 m.

5. Una escalera mide 10 m y está apoyada en un edificio. Si la base de la escalera está a 5 m del edificio, ¿A qué altura del edificio está la cima de la escalera?

6. Las cuatro bases a que se sujetan los cables que sirven para la estabilidad de la torre de una antena, están situados a 36 m del pie (base) de la misma. Calcular la longitud de los cables, si éstos se fijan a la torre a 48 m de altura.



7. Para sostener la torre de la antena de una estación de radio de 72 m de altura, se desea poner tirantes (cables) de 120 m para darle mayor estabilidad; si se proyecta tender los tirantes desde la parte más alta de la torre, ¿A qué distancia del pie de ésta deben construirse las bases de concreto para fijar dichos tirantes?

8. Un cateto de un triángulo rectángulo es cinco veces la longitud del otro. Hallar la medida del cateto más largo si la hipotenusa es de 60 m.

9. Un triángulo rectángulo tiene lados cuyas longitudes son enteros consecutivos. Hallar las longitudes de los lados.

10. Para verificar que un bastidor rectangular de 90 x 200 cm se encuentra escuadrado, un carpintero mide sus diagonales para comprobar que ambas tengan la misma longitud. ¿Qué medida deben tener las diagonales para que el bastidor este escuadrado?

Glosario

Diagonal: Una diagonal es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

Instrumento de evaluación

Para evaluar el logro de las competencias genérica y disciplinar (mismas que se enuncian al inicio del bloque y en la sección "de entrada" de la secuencia didáctica 2.2, respectivamente), utiliza el siguiente cuadro de semaforización, marcando el logro de dichas competencias con una palomita en el color correspondiente a tu desempeño.

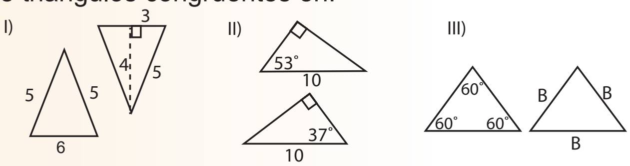
Competencia genérica.		
5.1	(rojo)	No sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, ni comprende cómo cada uno de los pasos en la aplicación de la expresión algebraica establecida en el Teorema de Pitágoras, contribuyen en la solución de problemas en situaciones diversas.
	(amarillo)	Presenta dificultades para seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, así como para comprender cómo cada uno de los pasos en la aplicación de la expresión algebraica establecida en el Teorema de Pitágoras, contribuyen en la solución de problemas en situaciones diversas.
	(verde)	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva para dar solución a problemas mediante la aplicación de la expresión algebraica establecida en el Teorema de Pitágoras, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de ese objetivo.
Competencia disciplinar.		
1	(rojo)	No construye ni interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran el Teorema de Pitágoras.
	(amarillo)	Presenta dificultades para construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran el Teorema de Pitágoras.
	(verde)	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran el Teorema de Pitágoras.

AUTOEVALUACIÓN

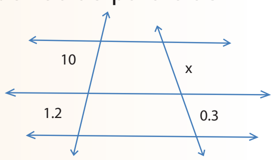
1. Dos triángulos isósceles que tienen la misma medida de su base, son siempre congruentes si:
   b) La altura de los dos triángulos mide lo mismo.
   c) Los ángulos de la base son agudos.
   d) En cada uno, los lados de la base miden 5 cm.
   e) Los ángulos de la base de ambos triángulos miden lo mismo.

2. Si en un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes se dibujan las diagonales, las cuales también son congruentes, entonces se forman.
   c) Cuatro triángulos equiláteros congruentes.
   d) Cuatro triángulos rectángulos escalenos.
   e) Cuatro triángulos acutángulos isósceles congruentes.
   f) Cuatro triángulos rectángulos isósceles congruentes.

3. Se muestra una pareja de triángulos congruentes en:
   d) I, II y III
   e) Sólo II
   f) Sólo III
   g) Sólo I y II



4. Es el valor de x en el siguiente sistema de rectas paralelas.
   e) 3.6
   f) 40
   g) 2.5
   h) 4



9. Se quiere enmarcar una fotografía de dimensiones 6 cm x 11 cm. Calcula las dimensiones del marco para que la razón entre el área del marco y el área de la fotografía sea 25/16.
   j) $7.5\ cm \times 13.75\ cm$
   k) $7\ cm \times\ 10.3\ cm$
   l) $7.04\ cm \times 9.375\ cm$
   m) $7.5\ cm \times 10.3\ cm$

6. Calcula la altura de una casa sabiendo que en un determinado momento del día proyecta una sombra de 3,5 m y una persona que mide 1,87 m tiene, en ese mismo instante, una sombra de 85 cm.
   g) $77\ m$
   h) $7.7\ m$
   i) $15.9\ m$
   j) $4.54\ m$

7. El área de un triángulo equilátero de lado 5 cm, es:
   h) 10.82 cm^2
   i) 13.97 cm^2
   j) 21.65 cm^2
   k) 46.87 cm^2

8. Al comprar una escalera de 10 metros de longitud, se le advierte al comprador que lo más cercano que debe estar el pie de la escalera del muro vertical donde se recargue es de 2.4 metros, si se acerca más pierde estabilidad y quien la suba podría sufrir un grave accidente. Bajo esta condición de seguridad, la máxima altura que puede alcanzar al recargar la escalera en el muro es de:
   i) 7.6 metros.
   j) 8.5 metros.
   k) 9.7 metros.
   l) 10.28 metros.

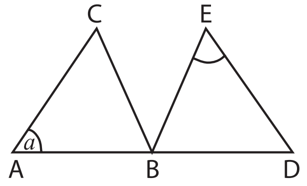
9. Para indicar el tamaño de las pantallas de televisión, los fabricantes proporcionan una medida en pulgadas, que representa la longitud de la diagonal del rectángulo que forma el monitor. ¿Qué dimensiones, de las enlistadas, corresponden a una pantalla de 27 pulgadas?
   j) 13 x 8.125 pulgadas.
   k) 12 x 9.37 pulgadas.
   l) 21x 16.97 pulgadas.
   m) 22 x 16.5 pulgadas.

10. Encuentra el valor de la hipotenusa "x" para el triángulo rectángulo cuyos catetos miden a=√3 y b=√6, respectivamente.
   k) $\sqrt{45}$
   l) 3
   a) 9
   b) $\sqrt{18}$

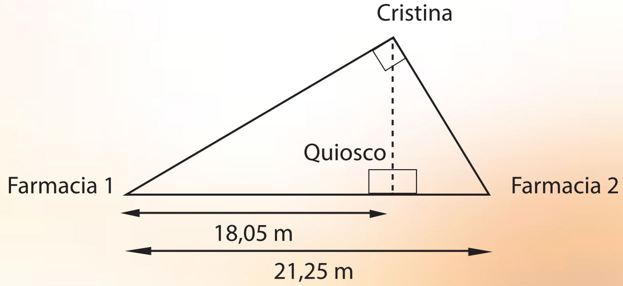
COEVALUACIÓN

1. Si en un triángulo ABC, isósceles y rectángulo en C, se traza $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$, entonces ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa? (Subraya la respuesta correcta).
2.
   1) $< BAC \cong < BCD$
   2) $\Delta ADC \cong \Delta BDC$
   3) $\overline{AB} \cong \overline{DB}$
   4) $\overline{AD} \cong \overline{CA}$
   5) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

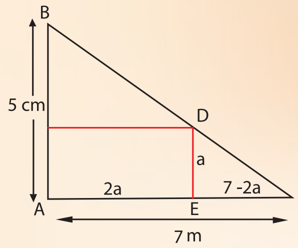
2. En la figura, los puntos A, B y D son colineales (es decir, que están sobre la misma línea), $\Delta ABC \cong \Delta DBE$, $\alpha = 36°$ y $< CBE = 20°$. ¿Cuánto mide el $< DEB$?



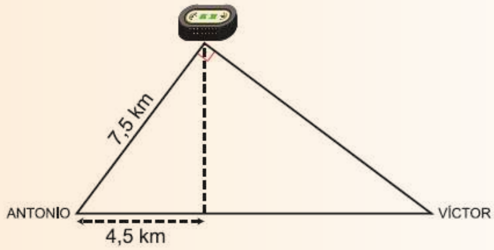
3. Dos farmacias se encuentran en un mismo edificio por la misma cera. Cristina, que está en el portal del edificio de enfrente, quiere comprar un medicamento. Observa el dibujo e indica cuál de las dos farmacias está más cerca de Cristina haciendo los cálculos que correspondan. ¿A qué distancia está Cristina del quiosco?



4. En un triángulo rectángulo se inscribe un rectángulo cuya base es dos veces su altura. Los catetos del triángulo miden 5 cm y 7 cm, respectivamente. Calcula las dimensiones del rectángulo.



5. Antonio y Víctor tienen sus casas en la misma acera de una calle recta. Todos los días van a un polideportivo que forma un triángulo rectángulo con sus casas. Observa la figura y responde:
   f) ¿A qué distancia está la casa de Víctor del polideportivo?
   g) ¿Qué distancia separa ambas casas?



6. Determina la longitud del segmento en las siguientes figuras.

7. Un bombero coloca la escalera cuya longitud es de 7.62 metros, a una distancia de 2 metros de la base de un edificio en llamas. Calcula la altura que alcanzó la escalera en el edificio.

8. La torre de una estación radiodifusora tiene una altura de 25 metros y está anclada a 8 metros medidos desde su base. ¿Cuál es la longitud del cable que realiza el anclaje de la torre?

9. Un poste de alumbrado público está anclado a una distancia de 3.5 metros a partir de su base, con un cable de 7 metros de longitud. Determina la altura del poste.

Bloque 3

Reconoce las propiedades de los polígonos y de la circunferencia

Desempeño del estudiante ¿Cómo lo aprenderé?

- Construyendo e interpretando modelos matemáticos sencillos sobre diferentes situaciones, en los que se identifican los elementos y propiedades de los polígonos y de la circunferencia cuya aplicación ayudará a resolver problemas que se derivan de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Tiempo asignado: 10 horas.

Objetos de aprendizaje ¿Qué aprenderé?

- Clasificación de los polígonos.
- Nombrar los polígonos según el número de lados.
- Identificar los elementos de los polígonos regulares: Radio, apotema, ángulo central, diagonales, ángulo interior, ángulo exterior.
- Identificar las relaciones y propiedades de los polígonos.
- Identificar los elementos de la circunferencia: Radio, cuerda, diámetro, secante, tangente, arco, ángulo central, ángulo inscrito, ángulo semi-inscrito, ángulo exterior.
- Identificar las propiedades de los diversos tipos de ángulos en la circunferencia.
- Obtención del área y perímetro de polígonos.
- Obtención del perímetro de la circunferencia y el área del círculo correspondiente.
- Aplica los elementos y propiedades de los polígonos y la circunferencia en la solución de problemas.

Competencias disciplinares a desarrollar Me servirá para:

- Construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Responde a cada uno de los siguientes planteamientos.

I. Calcula el área y perímetro de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

II. Calcula el área y perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 6 cm y sus lados iguales miden 5 cm.

III. Nombra los siguientes polígonos regulares de acuerdo al número de lados:

Número de lados del polígono	Nombre que recibe
3	
5	
6	
10	
12	
20	

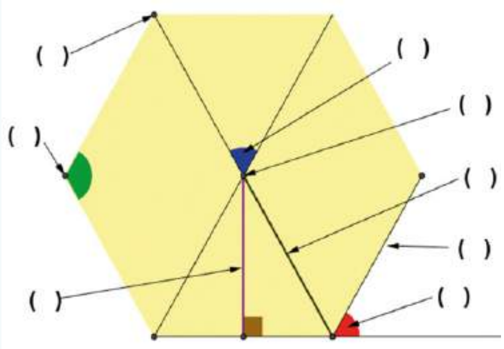
IV. Calcula el perímetro y área de un Hexágono regular cuyo lado mide 10 cm.

V. Calcula el perímetro de la circunferencia y el área del círculo correspondiente, si su radio mide 7 cm.

VI. El área de un círculo es de área de 25π, ¿Cuánto mide el perímetro de la circunferencia correspondiente?

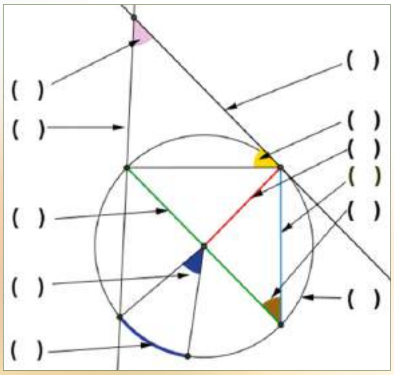
VII. Relaciona la columna de la izquierda con los elementos asociados al polígono:

a) Centro.
b) Lado.
c) Vértice.
d) Ángulo interno.
e) Radio.
f) Ángulo central.
g) Apotema.
h) Ángulo exterior.



VIII. Relaciona la columna de la izquierda, con los elementos asociados a la circunferencia:

a) Circunferencia.
b) Radio.
c) Diámetro.
d) Cuerda.
e) Secante.
f) Tangente.
g) Arco.
h) Ángulo central.
i) Ángulo inscrito.
j) Ángulo semi-inscrito.
k) Ángulo exterior.



Inicio

Secuencia didáctica 1
POLÍGONOS

De entrada

Al término de esta secuencia podrás identificar y clasificar polígonos, conocer sus elementos y las relaciones y propiedades de sus ángulos para aplicarlas en la solución de problemas.

De estas actividades obtendrás como evidencias de aprendizaje la deducción de las relaciones y propiedades de los ángulos en los polígonos regulares tales como: medida del ángulo interior, del ángulo exterior y del ángulo central; suma de ángulos interiores, exteriores y de ángulos centrales; y de éstas, aquellas que se utilizan en polígonos irregulares. Asimismo, la aplicación de estas propiedades en la solución de problemas que involucran polígonos. Otra evidencia de aprendizaje es la deducción de la fórmula para encontrar el área de un polígono regular y el procedimiento para encontrar el área de polígonos irregulares.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos
    - o Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
    - o Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Como producto principal, podrás resolver varias situaciones donde, para encontrar respuesta, se requiera el uso de las propiedades de los polígonos.

ACTIVIDAD 1
SD1-B3

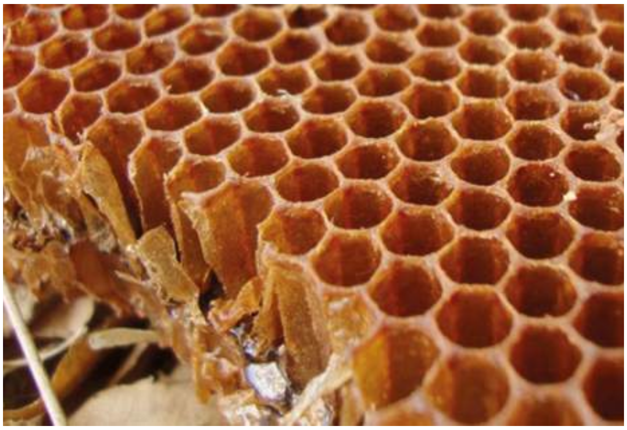
Polígonos

Diseños maravillosos y reconocimiento de figuras geométricas.

De manera individual, observa las siguientes fotografías y después responde a las preguntas planteadas.

Animales.

Celdas de un panal de abejas.



Telas de araña.

Flores.

Cristales.

Piedras preciosas.

Objetos.

Señales.

SEÑALES DE PREVENCIÓN

Arquitectura.

Pinturas.

Jardines.

Estructura molecular.

ACTIVIDAD 1 SD1-B3 **Continuación:**

Después de observar las imágenes, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué figuras geométricas reconoces y que nombre reciben? Menciónalas.

2. ¿Reconoces figuras geométricas perfectas e imperfectas? Menciona al menos tres de cada una.

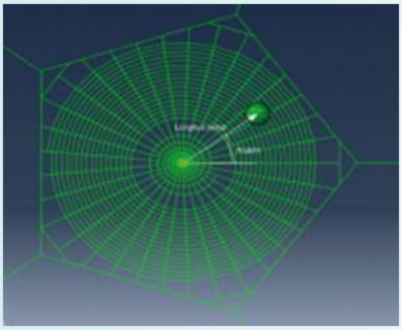
3. ¿Alguna vez has meditado en los diseños plasmados en la naturaleza como: piel de la jirafa, piel de las serpientes, caparazón de la tortuga, las telas de araña, celdas del panal de abejas, etc.? Expresa por escrito.

4. Recorre con tu imaginación cada espacio de tu casa ¿Reconoces figuras geométricas? Menciónalas.

5. Observa tu salón de clases ¿Qué figuras geométricas reconoces? Menciónalas.

Las figuras geométricas están en todos los lugares, desde el nivel microscópico (estructura molecular), hasta lo macroscópico (caparazón de tortuga); algunas de ellas son diseños maravillosos como los plasmados en la piel de las jirafas, en el caparazón de las tortugas, en las telas de arañas, en las celdas de los panales de abejas, etc.

Las celdas de los panales de abejas han llamado la atención, desde tiempos antiguos respecto a la forma en que son construidas, de igual manera, hay estudios sobre los diseños de las telas de araña. El hombre aprende de la naturaleza para hacer innovaciones que beneficien su vida cotidiana.

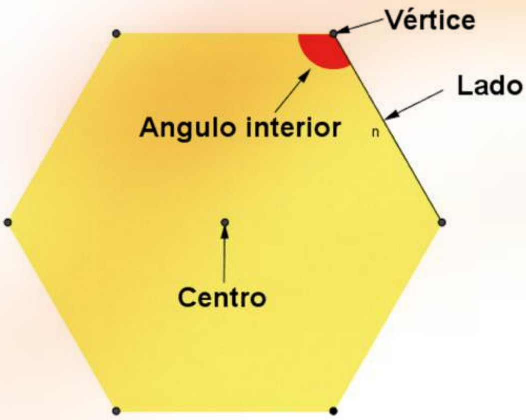


Saber más...

En la comunidad científica, las arañas tienen la fama de estar en el primer escalafón de la ingeniería, no solo porque son capaces de producir uno de los biomateriales más resistentes que se conocen, superando en resistencia a materiales, tales como: la fibra de carbono y el acero de alta resistencia, sino también por el uso que hacen de ese material, formando estructuras elegantes que optimizan su producción y diseño para la captura de presas frente a impactos. Esto ha provocado que las telas de araña sean objeto de estudio por parte de la comunidad científica, ya que si se es capaz de entender las razones del éxito de las telas de araña, podrían aplicarse esos conocimientos al cálculo de estructuras ligeras o a la creación de biomateriales con resistencias superiores a los existentes en la actualidad.

En este bloque enfocaremos nuestra atención, sobre las figuras geométricas llamadas polígonos (específicamente sobre su clasificación, elementos y propiedades) y en la circunferencia (elementos y propiedades), es decir, en aquello básico y relevante que el hombre, a través de la historia, ha descubierto al estudiarlas y que te servirá en el trascurso de tu vida académica.

Polígonos:



A través del tiempo...

La palabra polígono viene del vocablo griego: “poli” que significa muchos y “gonos” ángulos, es decir, el polígono es una figura geométrica que tiene muchos ángulos o muchos lados, mínimo tres y generalmente en un plano.

El polígono es una porción del plano limitado por segmentos de líneas rectas. Estos segmentos se llaman lados del polígono. Los polígonos se clasifican por:

a) La medida de sus lados. Pueden ser equiláteros, es decir, son aquellos que tienen todos sus lados iguales; por ejemplo el cuadrado y el hexágono.

b) La medida de sus ángulos interiores. Pueden ser equiángulos, es decir, son los que tienen todos sus ángulos interiores iguales, sin que necesariamente tengan los lados iguales como el caso del rectángulo.

c) Por la forma de su contorno. Pueden ser regulares e irregulares.

   Los regulares tienen sus lados y ángulos interiores iguales, es decir son equiláteros y equiángulos a la vez.

   Los irregulares no cumplen con la característica de los regulares, es decir, no son equiláteros y equiángulos a la vez. Pueden tener los lados iguales pero los ángulos interiores diferentes, como el rombo, o pueden tener los ángulos interiores iguales pero sus lados no, como el caso del rectángulo. Es decir, pueden ser equiláteros o equiángulos, pero no los dos tipos a la vez. Puede darse el caso también de que no sean equiláteros ni equiángulos, es decir que todos sus lados y ángulos interiores son diferentes.

d) Por el tipo de ángulos interiores que contiene: Cóncavos y convexos. Los ángulos interiores van desde agudos hasta entrantes. Los polígonos convexos son los que poseen todos sus ángulos internos de una medida mayor de 0º pero menor a 180º (ángulos agudos, rectos u obtusos). Los cóncavos son los que poseen por lo menos un ángulo interior entrante, es decir, un ángulo que es mayor de 180º pero menor de 360º.

Los polígonos reciben su nombre de acuerdo al número de lados que poseen. En la siguiente tabla aparecen los nombres y el número de lados de los polígonos.

Número de lados del polígono	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero (Cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio, trapezoide, paralelogramo)
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Para nombrar los polígonos de 21 a 99 lados, se usa la siguiente tabla:

Decenas		y	Unidades		Terminación
20	icosa		1	hená	
30	triaconta		2	dí	
40	tetraconta		3	trí	
50	pentaconta	kai	4	tetrá	gono
60	hexaconta		5	pentá	
70	heptaconta		6	hexá	
80	octaconta		7	heptá	
90	eneaconta		8	octá	
			9	eneá	

Ejemplos	
21	Icosakaihenágono
44	Tetracontakaitetrágono
99	Eneacontakaieneágono
100	Hectágono

En las siguientes actividades, conforme se vaya avanzando, se mencionarán y definirán los elementos de los polígonos, así como las relaciones y propiedades de los polígonos. Entre los elementos se pueden mencionar: radio, apotema, diagonales, ángulo central, ángulo interior, y ángulo exterior. Primeramente se estudiaran los polígonos regulares y después los irregulares.

Desarrollo

ACTIVIDAD 2
SD1-B3

Deduciendo las propiedades de los polígonos regulares (primera parte).

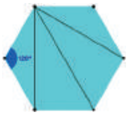
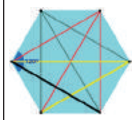
Polígonos Regulares

¿Sabías qué?

El triángulo es la base de todos los polígonos y la figura geométrica más rígida. Las estructuras metálicas se refuerzan siempre con triángulos para darles mayor rigidez; por lo tanto, si quieres tener una estructura firme, incluye triángulos.

Organizados en binas, llenen la tabla que aparece a continuación, según los encabezados de cada columna y guiándose por los ejemplos mostrados.

Nombre del polígono ***regular.***	Dibujo.	Número de lados.	Número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice. Una diagonal es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono. Trazar las diagonales en el dibujo de la columna 2.	Número de triángulos que se forman al trazar las diagonales desde un mismo vértice, o bien, triángulos existentes si no se trazaron diagonales.	Suma de los ángulos interiores de cada triángulo (equivale a la suma de los ángulos interiores del polígono). Un ángulo interior es el ángulo formado por dos lados consecutivos del polígono.	Medida de cada ángulo interior. Escribe y señala en el dibujo de la columna 2 dicho ángulo.	Total de diagonales que se pueden trazar a partir de cada vértice del polígono (ver ejemplo del hexágono).		
							Dibujo.	Total de diagonales con repetición	Total de diagonales sin repetición. Marcar las diagonales con diferente color.
Triángulo equilátero.		3	0 (ninguna)	1	180°(1)= 180°	$\frac{180°}{3}=$ 60°		0 (ninguna)	0 (ninguna)
Cuadrado.				2	180°(2)= 360°				2

Pentágono.						$\frac{540°}{5} =$ 108°			
Hexágono.			3					18	9
Octágono.									
Decágono.									
Polígono de “n” lados. Generaliza con base a “n”.	No llenar..	n			Ver columna 5	Ver columna anterior.	No llenar.	Ver columna 4.	Ver columna anterior.

Con base en las expresiones algebraicas obtenidas en la última fila de la tabla, escriban en el siguiente recuadro las fórmulas que se utilizan para calcular cada aspecto que se menciona, respecto a un polígono ***regular*** de "n" lados. A cada aspecto enlistado se le conoce como propiedades de los polígonos.

Aspecto. (Propiedad de los polígonos).	Fórmula.
Número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice. Denótalo con **d.**	
Número de diagonales que se pueden trazar a partir de cada vértice del polígono, sin que éstas se repitan. Denótalo con **D.**	
Suma de los ángulos interiores del polígono. Denótala con **Si .**	
Medida de cada ángulo interior del polígono. Denótala con $\measuredangle i$.	

ACTIVIDAD 3
SD1-B3

Verificando las propiedades de los polígonos regulares (primera parte).

Polígonos regulares

A continuación y organizados en binas, verifiquen si las fórmulas obtenidas en la actividad anterior se cumplen para cada uno de los polígonos de la tabla, aplicándolas ***directamente***, es decir, sin seguir el procedimiento descrito en la tabla. Si al aplicarlas obtienen los mismos resultados de la tabla, entonces podrán utilizar las fórmulas establecidas para cualquier polígono regular, donde "n" representará el número de lados del polígono; de lo contrario, tendrán que reflexionar de nuevo en el llenado de la tabla hasta conseguir que los resultados coincidan.

Polígono Regular.	Aplicación directa de la fórmula obtenida para calcular:				¿Coinciden los resultados obtenidos con los de la tabla?	
	Número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice d.	Número de diagonales que se pueden trazar a partir de cada vértice del polígono, sin que éstas se repitan. D.	Suma de los ángulos interiores del polígono Si	Medida de cada ángulo interior del polígono $\measuredangle i$	Si	No
Triángulo equilátero.						
Cuadrado.						
Pentágono.						
Hexágono						
Octágono.						
Decágono.						

Si sus resultados coinciden, entonces apliquen las fórmulas **directamente** para resolver los siguientes problemas.

1. En un heptágono regular, obtengan:

   a) Número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice.

   b) Número de diagonales que se pueden trazar a partir de cada vértice del polígono, sin que éstas se repitan.

   c) Suma de los ángulos interiores del polígono.

   d) Medida de cada ángulo interior del polígono.

e) Construyan el dibujo correspondiente con sus respectivas diagonales y señalen el ángulo interior.

2. Si la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es 2340º :

   a) ¿Qué nombre recibe el polígono? ______________________________

   b) ¿Cuántos grados mide su ángulo interior? ______________________________

3. Si el ángulo interior de un polígono regular mide 150º :

   a) ¿De qué polígono se trata? ______________________________

   b) ¿Cuántos grados suman sus ángulos interiores? ______________________________

   c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un mismo vértice? ____________________

   d) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar a partir de cada vértice del polígono, sin que éstas se repitan?______________________________

4. Si el total de diagonales sin repetición que se pueden trazar desde cada vértice de un polígono regular, es 170, ¿Cuántos lados tiene el polígono y qué nombre recibe? ____________________

____

____

¿Sabías qué?

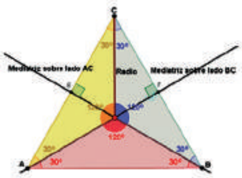
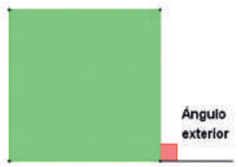
Dos ángulos adyacentes son aquellos que tienen un lado y el vértice en común, y los lados no comunes son coelineales, es decir, se encuentran sobre la misma recta.

ACTIVIDAD 4

SD1-B3

Deducción de las propiedades de los polígonos regulares (segunda parte).

Organizados en binas, llenen la tabla que aparece a continuación, según los encabezados de cada columna y guiándose por los ejemplos mostrados. Después den respuesta a lo solicitado.

Nombre del polígono regular.	En el dibujo del polígono traza las mediatrices en dos de sus lados para ubicar el centro del polígono (punto de intersección de las mediatrices) y unan con una línea el centro con cada vértice del polígono (este segmento de recta se llama radio del polígono).	Medida del ángulo central, el cual tiene su vértice en el centro del polígono y su lado inicial y final son dos radios del polígono. Anotar en el dibujo la medida en cada ángulo central formado por dos radios del polígono.	Número de triángulos que se forman en el interior del polígono. Cada triángulo tiene sus vértices en el centro y en dos de los vértices consec utivos del polígono.	Nombre que recibe cada triángulo formado, según la medida de sus ángulos interiores. Anotar en el dibujo las medidas de los ángulos interiores en cada triángulo.	Medida de cada ángulo interior del polígono.	Suma de los ángulos interiores del polígono	Trazar en el dibujo un ángulo exterior. Esto se consigue prolongando uno de los lados del polígono, es decir, el ángulo exterior es adyacente a uno de los ángulos interiores del polígono. Anota su medida (ver ejemplo en cuadrado) ..	Suma de los ángulos exteriores del polígono.
Triángulo equilátero.		$\frac{360°}{3} = 120°$	3	Isósceles	60°	60(3)= 180°	180°- 60°= 120°	
cuadrado							180°-90°= 90°	90(4)= 360°
Pentágono.								
Hexágono.								

Octágono.								
Decágono.								
Polígono de "n" lados.	No llenar.	Generalizar con base a "n".		No llenar.	No llenar.	Generalizar con base a $\measuredangle i$ y n.	Generalizar con base a $\measuredangle i$.	¿Cuánto suman?

1. Con base en las expresiones algebraicas obtenidas en la última fila de la tabla, escriban en el siguiente recuadro las fórmulas que se utilizan para calcular cada aspecto que se menciona, respecto a un polígono ***regular*** de "n" lados. A cada aspecto enlistado se le conoce como propiedades de los polígonos.

Aspecto. (Propiedad de los polígonos).	Fórmula.
Medida de cada ángulo central. Denótala con $\measuredangle c$.	
Suma de todos los ángulos centrales. Denótala con **Sc.**	
Medida del ángulo exterior. Denótala con $\measuredangle e$.	
Suma de todos los ángulos exteriores Denótala con **Se.**	
Suma de ángulos interiores del polígono. Denótala con **Si.**	

2. Con base en el llenado de la tabla, para cualquier **polígono regular**:

   a) ¿Cómo son las medidas del ángulo central y exterior? ______________________________

   b) ¿Cuánto suman los ángulos centrales? ____

   c) ¿Cuánto suman los ángulos exteriores? ____

   d) ¿Cuánto suma un ángulo interior con su respectivo ángulo exterior? ___________________

e) ¿Qué tipo de triángulos se forman en el interior de un polígono (los lados de cada triángulo están formados por dos radios y un lado del polígono)? ______________________________

f) ¿En qué polígonos se forman triángulos equiláteros? ¿Será el único? Argumenten. ________

____

g) ¿De qué depende el número de triángulos formados en el interior del polígono, así como: el número de ángulos centrales, el número de ángulos exteriores y el número de ángulos interiores del polígono? ____

____

3. Las medidas de cada ángulo interior y la suma de los ángulos interiores, mediante el procedimiento seguido en el llenado de esta tabla ¿Coinciden con los procedimientos utilizados en las actividades anteriores? ____

____

____

ACTIVIDAD 5

SD1-B3

Verificando las propiedades de los polígonos regulares (segunda parte).

A continuación y organizados en binas, verifiquen si las fórmulas obtenidas en la actividad anterior se cumplen para cada uno de los polígonos de la tabla, aplicándolas ***directamente***, es decir, sin seguir el procedimiento descrito en la tabla. Si al aplicarlas obtienen los mismos resultados de la tabla, entonces podrán utilizar las fórmulas establecidas para cualquier polígono regular, donde "n" representará el número de lados del polígono; de lo contrario, tendrán que reflexionar de nuevo en el llenado de la tabla hasta conseguir que los resultados coincidan.

Polígono Regular.	**Aplicación directa de la fórmula obtenida para calcular:**					¿Coinciden los resultados obtenidos con los de la tabla? Marca con una palomita.	
	Medida de cada ángulo central $\measuredangle c$.	Suma de todos los ángulos centrales **Sc.**	Medida del ángulo exterior $\measuredangle e$.	Suma de todos los ángulos exteriores **Se.**	Suma de ángulos interiores del polígono **Si.**	Si	No
Triángulo equilátero.							
Cuadrado.							
Pentágono.							
Hexágono.							
Octágono.							
Decágono.							

Si sus resultados coinciden, entonces apliquen las fórmulas para resolver los siguientes problemas.

1. El ángulo central de un polígono regular mide 30º:
   a) ¿De qué polígono se trata? ____________________
   b) ¿Cuántos grados mide su ángulo exterior? ____________________
   c) ¿Cuántos grados suman los ángulos centrales? ____________________
   d) ¿Cuántos grados suman los ángulos exteriores? ____________________
   e) Construyan el dibujo correspondiente, indicando el ángulo central y el ángulo exterior.

2. El ángulo exterior de un polígono regular mide 40º :
   a) ¿De qué polígono se trata? ____________________
   b) ¿Cuántos grados mide su ángulo central? ____________________
   c) ¿Cuántos grados suman los ángulos centrales? ____________________
   d) ¿Cuántos grados suman los ángulos exteriores? ____________________
   e) Construyan el dibujo correspondiente, indicando el ángulo central y el ángulo exterior.

3. En el heptágono regular, calcular:
   a) Medida del ángulo central. ____________________
   b) Medida del ángulo exterior. ____________________
   c) Suma de los ángulos centrales. ____________________
   d) Suma de los ángulos exteriores. ____________________

Perímetro y área de polígonos regulares.

Si en el cuadrado y hexágono de la actividad 4, el lado de estos polígonos mide 2 cm, organizados en binas, calculen lo que se les solicita **en cada polígono**:

a) En uno de los triángulos que se forman dentro del polígono (para cuadrado y hexágono), calcular la medida de la altura trazada sobre el lado del triángulo que también es el lado del polígono. Para ello, apóyense del Teorema de Pitágoras. Esta altura equivale al apotema del polígono. Por lo tanto el apotema (a) es el segmento de recta que une el centro del polígono con el punto medio de uno de sus lados y tiene la propiedad de ser perpendicular a éste. Traza el apotema en el triángulo.

b) Área del triángulo del inciso anterior.

c) Área del polígono a partir del resultado del inciso b.

d) Área del cuadrado con al menos otros dos procedimientos diferentes y área del hexágono mediante otro procedimiento.

e) Perímetro de cada polígono (cuadrado y hexágono).

Ahora concentren su atención en la siguiente figura: es el cuadrado de lado 2 cm del ejercicio anterior, al que se le han recortado los triángulos formados en su interior y se han colocado dentro del rectángulo ABCD, de tal modo que la altura (apotema) de uno de los triángulos es el ancho del rectángulo y el largo está dado por el perímetro del cuadrado. Observen cuántas veces cabe el cuadrado en el rectángulo ABCD para establecer una fórmula que les ayude a obtener el área del cuadrado considerando el área del rectángulo y que esté expresada con base en las dimensiones del rectángulo ABCD: apotema del polígono (ancho) y perímetro del polígono (largo). Apliquen la fórmula para calcular **directamente** el área del cuadrado y verifiquen que el resultado concuerde con el obtenido mediante el procedimiento descrito al inicio de esta actividad.

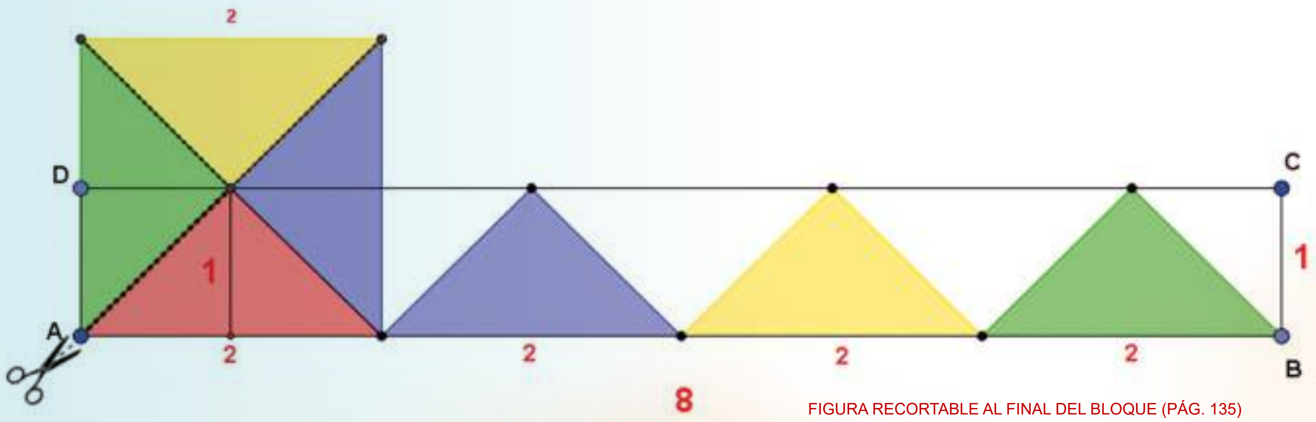


FIGURA RECORTABLE AL FINAL DEL BLOQUE (PÁG. 135)

Se ha hecho lo mismo con el hexágono de lado 2 cm del ejercicio de inicio (ver figura), al que se le han recortado los triángulos formados en su interior y se han colocado dentro del rectángulo ABCD, de tal modo que la altura (apotema) de uno de los triángulos es el ancho del rectángulo y el largo está dado por el perímetro del hexágono. Observen cuántas veces cabe el hexágono en el rectángulo para establecer una fórmula que les ayude a obtener el área del hexágono considerando el área del rectángulo ABCD y que esté expresada con base en las dimensiones del rectángulo: apotema del polígono (ancho) y perímetro del polígono (largo).Apliquen la fórmula para calcular **directamente** el área del hexágono y verifiquen que el resultado concuerde con el obtenido mediante el procedimiento descrito al inicio de esta actividad.

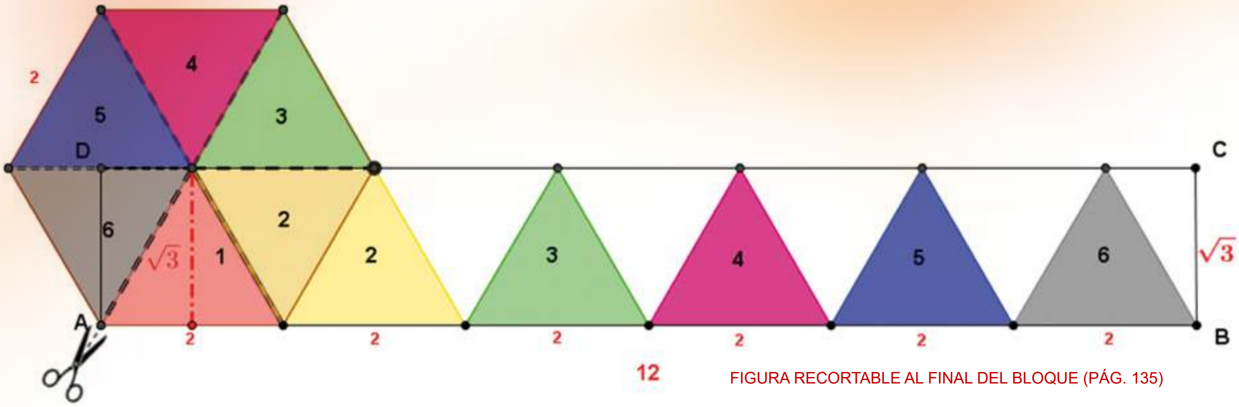


FIGURA RECORTABLE AL FINAL DEL BLOQUE (PÁG. 135)

¿Se parecen las fórmulas obtenidas mediante este procedimiento para el área del cuadrado y del hexágono? ¿La fórmula se puede generalizar para cualquier polígono regular?

Apliquen la fórmula para obtener el área de:

a) Un hexágono regular de lado 10 cm.

b) Un pentágono regular de lado 10 cm y de radio 8.5 cm.

c) Un octágono regular cuyo lado mide 8 cm y la apotema 9.65 cm.

d) Un decágono regular si su radio mide 21.03 cm y su apotema 20 cm.

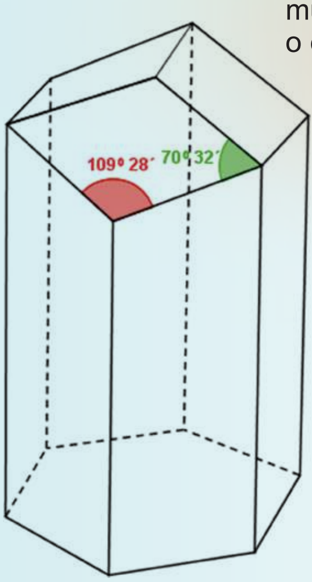
ACTIVIDAD 7
SD1-B3

¿Saben Matemáticas las abejas?

La geometría del panal de abejas.

Un panal de abejas es una estructura formada por celdas de cera, que comparten paredes en común y son construidas por las abejas, debido a que las abejas obreras cuentan con glándulas cereras que producen este elemento natural. Las celdas son utilizadas para depositar sus alimentos: polen y miel, pero también sirven como habitáculo para la cría de obreras y zánganos.

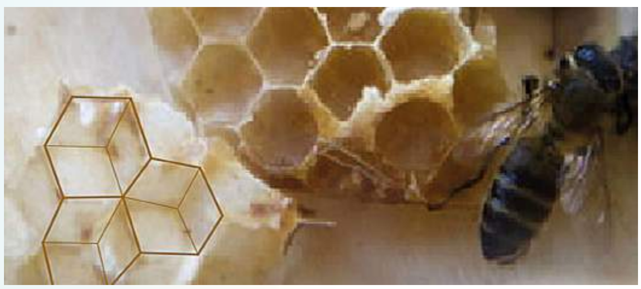
Desde tiempos antiguos llamó la atención de científicos la estructura de las celdas de los panales de abejas. Tras varios años de estudios se llegó a la conclusión que las celdas no eran prismas hexagonales sino rombododecaedros, tal como se muestra en la siguiente figura, parecidos al aspecto de minerales como la fluorita o el granate.



Fluorita.

Granate.

El fondo de la celda está formado por una especie de copo de tres caras que son rombos iguales. El astrónomo Maraldi tomó la iniciativa de medir los ángulos de estos rombos y se dio cuenta que el mayor (obtuso) medía 109° 28' y el menor (agudo) 70° 32'.



Una ventaja de la forma en que las abejas cierran las celdas por la parte del fondo con los tres rombos, es que permite a las abejas construir dos hileras de celdas bien acopladas, perfectamente y sin dejar huecos, por la parte de atrás de las mismas, pero abiertas en sentido contrario unas de las otras. De esta manera, cada celda comparte cada una de sus paredes con seis celdas adyacentes, y además, las tres paredes rómbicas, con otras tantas colocadas en el sentido contrario. De esta manera forman un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdas, ya que tratan de aprovechar el espacio al máximo. Cuando esto último sucede, se le llama teselación del plano, es decir, pueden cubrir el plano sin dejar huecos.

De lo anterior surgen las siguientes preguntas:

¿Por qué las abejas escogen hacer las celdas con hexágonos y no con triángulos equiláteros o cuadrados, si también con estos dos últimos polígonos pueden conseguir lo mismo? ¿Actúan llevadas por un instinto geométrico de origen divino, o responden a razones evolutivas por una cuestión de utilidad?, o bien. ¿Viene la forma hexagonal del aplastamiento de unas celdas sobre otras como algunos llegaron a pensar?

Uso de las TIC´S:

En el siguiente enlace encontrarás un juego para hacer teselaciones.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/flash.php?path=%2Fgeometria/images/tessellation.swf&w=960&h=630&col=%23FFFFFF&title=Artista+de+teselaciones.

La respuesta es un problema isoperimétrico (del griego “igual perímetro”) y de optimización, tal como lo demostró el matemático griego Pappus de Alejandría, quien afirmó que de entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tienen mayor número de lados. Pappus se dio cuenta que construyendo hexágonos, las abejas utilizan el mismo perímetro que con triángulos equiláteros o cuadrados, pero el área que encierra el hexágono es mayor. De esta manera, **las abejas pueden almacenar la mayor cantidad de miel ahorrando al máximo la producción de cera. Así, habrá una relación óptima entre el volumen interior y la superficie de las paredes del rombododecaedro (celda).**

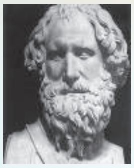
Esta conclusión no fue inmediata y algunos personajes eminentes, como: Kepler y Darwin, creyeron que la forma hexagonal era una deformación, por aplastamiento, de la forma que les parecía más natural, es decir, el círculo.

Edgar Alan Poe (1809-1849) en “El Cuento Mil y dos de Scherezada” expresa:

> *“Abandonando aquella tierra, llegamos en seguida a otra, en la que las abejas y los pájaros* ***son matemáticos de tanto genio y erudición que diariamente dan lecciones científicas de geometría a los sabios del imperio.*** *El rey de aquel lugar ofreció una recompensa por la solución de dos problemas muy difíciles; problemas que fueron resueltos al momento:* ***uno por las abejas*** *y otro por los pájaros; pero el rey guarda su solución en secreto y, sólo* ***tras muchas discusiones y trabajo y la escritura de voluminosos libros durante una serie de años, llegaron los hombres matemáticos finalmente a soluciones idénticas a las dadas por las abejas*** *y por los pájaros.”*

¿Cuántas cosas habrá en la naturaleza esperando a que alguien las descubra para hacer innovaciones que beneficien la vida de la humanidad? Sería muy interesante ser parte de estos descubrimientos.

¿Quién fue?

 Pappus de Alejandría	Pappus, Papo o Pappo, fue un importante matemático griego de los siglos III-IV. En geometría, se le atribuyen varios teoremas, conocidos todos con el nombre genérico de Teorema de Pappus. Entre estos teoremas está el Teorema del Hexágono de Pappus.
 Johannes Kepler	Johannes Kepler, figura clave en la revolución científica, fue un astrónomo y matemático alemán; conocido fundamentalmente por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol.
 Charles Darwin	Charles Robert Darwin fue un naturalista inglés, reconocido por ser el científico más influyente de los que plantearon la idea de la evolución biológica a través de la selección natural, justificándola en su obra de 1859 “El origen de las especies” con numerosos ejemplos extraídos de la observación de la naturaleza.
 Giacomo Filippo Maraldi	Giacomo Filippo Maraldi, conocido también como Jacques PhilippeMaraldi, fue un matemático y astrónomo italiano.

Problema:

Con base a lo anterior, y sin tomar en cuenta el copo formado por los tres rombos en la celda del panal de abejas, es decir, considerando que las celdas fuesen prismas hexagonales regulares, comprueba la afirmación contenida en el penúltimo párrafo. Supón para ello, una celda con perímetro 12 cm. y de una altura de 10 cm. (medidas no reales) y obtén el área de la superficie y el volumen de miel almacenado, considerando las tres figuras geométricas que pueden teselar el plano sin dejar huecos, es decir: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

Haz un dibujo para cada figura geométrica y responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto mide el lado de cada figura geométrica para que el perímetro sea de 12 cm?

2. Calcula el área de la superficie (cada cara de los prismas formados, sin considerar fondo y tapa de la celda).

3. Calcula el volumen de cada prisma formado.

4. Para una misma cantidad de cera, ¿En cuál figura geométrica se puede almacenar una mayor cantidad de miel?

5. ¿Cuál es la diferencia porcentual (porcentaje) de miel entre los recipientes con respecto al recipiente de mayor capacidad?

6. ¿Qué enseñanza te dejan las abejas?

¿Sabías qué?

La Francia continental europea recibe el sobrenombre de L´ Hexagone (“el hexágono”), en alusión a la forma de su perímetro.

ACTIVIDAD 8

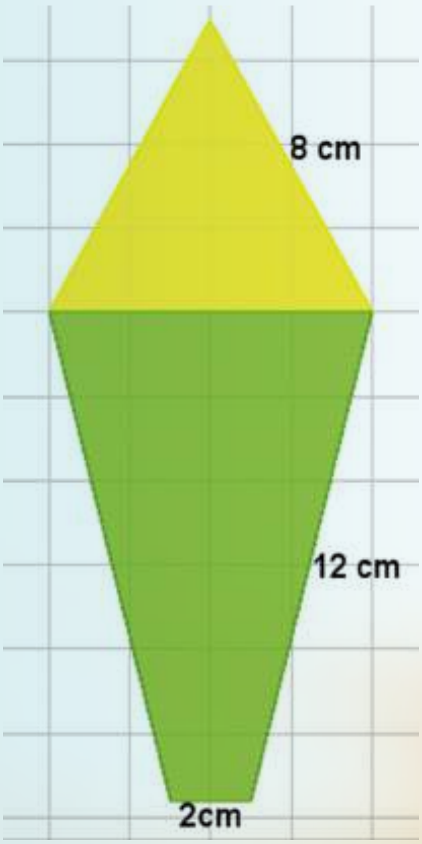
SD1-B3

Polígonos Irregulares.

En polígonos irregulares se pueden aplicar las mismas fórmulas deducidas para polígonos regulares, excepto la fórmula para obtener el área, ya que no se puede trazar el apotema y la fórmula para obtener la medida del ángulo interior.

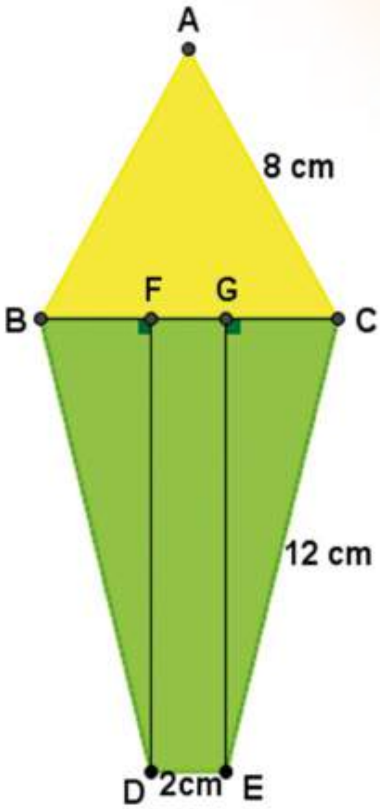
Problema 1.

A continuación se presenta un polígono irregular (pentágono irregular), compuesto por un triángulo equilátero de lado 8 cm y un trapecio isósceles, cuya base menor mide 2 cm y el lado 12 cm. Calcula el perímetro y área de dicho polígono y la medida de cada ángulo interior.



Cuando los polígonos son irregulares, la manera en que se procede para calcular su área, es dividiendo la figura en polígonos regulares o irregulares cuyas áreas podemos conocer y después se suman para obtener el área de la figura completa. Para obtener la medida de lados y ángulos, podemos utilizar las fórmulas deducidas en el desarrollo de las actividades de este módulo, (excepto las ya mencionadas) y de otras que se expondrán en los bloques siguientes. A continuación se presenta una alternativa de solución.

Se dividirá la figura anterior de la siguiente manera:



A través del tiempo...

La palabra perímetro viene del vocablo griego: "peri" que significa alrededor y "metron" medida, es decir, el perímetro de una figura geométrica es la medida de su contorno. En el caso de un polígono es la suma de sus lados y en el caso de una circunferencia es la medida de la misma.

1. El área total será la suma de: triángulo equilátero ABC + área de los dos triángulos rectángulos que forman parte del trapecio (triángulos BDF y CGE) + área del rectángulo DEGF. Calcula el área total. Auxíliate del Teorema de Pitágoras para encontrar la medida de los segmentos FD, GE.

2. Otra alternativa para encontrar el área total es sumar: Área del triángulo equilátero + área del trapecio isósceles. Investiga la fórmula para encontrar el área de un trapecio isósceles. Calcula el área total de la figura. ¿Coincide este resultado con el obtenido anteriormente?

3. Calcula el perímetro del pentágono irregular.

Para encontrar la suma de los ángulos interiores, aun no estamos en condiciones de obtener la medida de todos ellos, ya que, nos faltan herramientas matemáticas para ello. En el siguiente bloque se te indicará como poder encontrar la medida de algunos ángulos mediante las razones trigonométricas. En este caso necesitamos conocer la medida de los ángulos que forman parte de los ángulos interiores de la figura, es decir, la suma de los ángulos: CAB, CBA, ACB, EDF, GED, DBF, GCE, FDB, CEG. La figura mostrada es un pentágono irregular por lo que la suma de los ángulos anteriores debe coincidir con la suma de la medida de los ángulos interiores de un pentágono.

1. Los ángulos interiores del pentágono son: CAB, DBA, EDB, CED, ACE. ¿Por qué no se puede aplicar la fórmula deducida en las actividades de desarrollo de este bloque para obtener la medida de cada ángulo interior de este pentágono?

2. Por el momento podemos conocer la medida de los ángulos CAB, CBA y ACB. ¿Cuánto miden y por qué?

3. De igual manera se pueden conocer las medidas de los ángulos EDF y GED. ¿Cuánto miden y por qué?

4. Las medidas de los ángulos DBF, GCE, FDB, CEG, aún no estamos en condiciones de conocerlas, pero en el bloque siguiente se te mostrará la manera de hacerlo mediante razones trigonométricas.

5. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un pentágono? En este caso si se puede aplicar la fórmula deducida para un pentágono regular.

Problema 2.

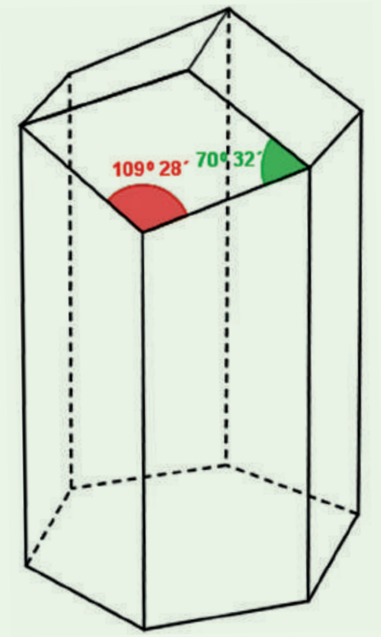
Considerando uno de los tres rombos de una de las celdas del panal de abejas (ver figura), cuyos ángulos interiores miden 109° 28’ y 70° 32’, lo que lo hace un polígono irregular, obtener:

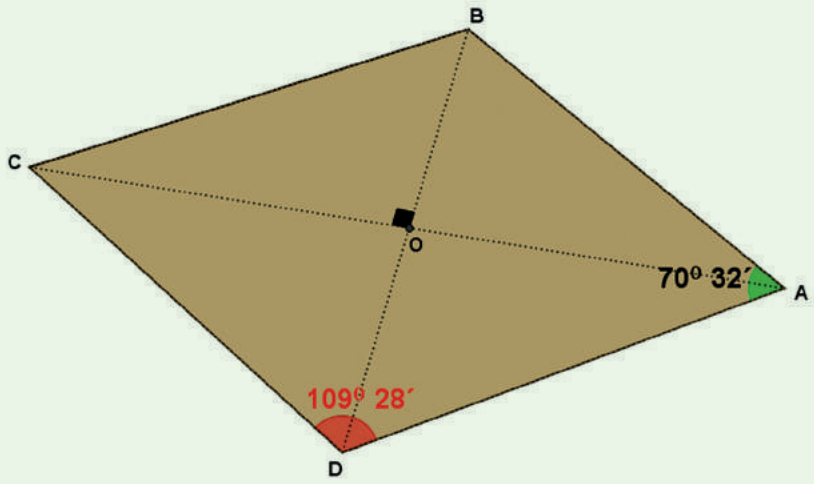
a) La medida de los otros dos ángulos interiores.

b) La suma de los ángulos interiores.

c) La medida de un ángulo exterior.

d) La suma de los ángulos exteriores.





Si conociéramos la medida de uno de los lados del rombo, se podría dividir el rombo en triángulos y mediante razones trigonométricas o ley de senos y cosenos se podrían encontrar las medidas de las diagonales (la mayor y la menor), y aplicar la fórmula establecida para calcular el área de un rombo. También se puede calcular el área de cada triángulo en los que se dividió el rombo y sumarlas para obtener el área total. Ambos resultados deben de coincidir. En los siguientes bloques se estudiarán las razones trigonométricas como se mencionó anteriormente y las leyes de senos y cosenos.

Logros

Cierre

ACTIVIDAD 9
SD1-B3

Guarda tus respuestas y procedimientos en tu portafolio.

En el desarrollo de las actividades debiste de haber deducido las siguientes fórmulas, que forman parte de las propiedades de los polígonos:

Aspecto **(Propiedades de los polígonos).**	**Fórmula** ("n" representa el número de lados del polígono).	**Se cumple en polígonos** (aparece, si o no, donde corresponda).	
		Regulares	**Irregulares**
Número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice. Denótalo con **d.**	**d= n -3**	si	si
Número de diagonales que se pueden trazar a partir de cada vértice del polígono, sin que éstas se repitan. Denótala con **D.**	$D = \frac{(n-3)n}{2}$	si	si
Suma de los ángulos interiores del polígono. Denótala con **Si.**	**Si=180°(n-2)**	si	si
	Si=(n)($\measuredangle i$)	si	no
Medida de cada ángulo interior del polígono. Denótalo con $\measuredangle i$.	$\measuredangle i = \frac{Si}{n}$ $= \frac{180°(n-2)}{n}$	si	no
Medida de cada ángulo central. Denótalo con $\measuredangle c$.	$\measuredangle c = \frac{360°}{n}$	si	no
Suma de todos los ángulos centrales. Denótala con **Sc.**	**Sc=360°**	si	si
Medida del ángulo exterior. Denótalo con $\measuredangle e$.	$\measuredangle e = 180° - \measuredangle i$	si	si
Suma de todos los ángulos exteriores Denótalo con **Se.**	**Se= 360°**	si	si
Área.	$A = \frac{(P)(a)}{2}$ Donde **P** es el perímetro y **a** el apotema del polígono.	si	no

Aplica las fórmulas y los conocimientos adquiridos en este bloque para resolver los siguientes problemas:

1. Calcular el área de un hexágono regular sabiendo que su apotema es igual a $5\sqrt{3}\ cm$ y el lado mide 12 cm.

2. Si el lado de un hexágono regular mide 16 cm, ¿Cuánto mide su apotema?

3. Calcular el área de un eneágono regular si su lado mide 25 cm y su apotema 10 cm.

4. Hallar el radio y el apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 2 cm.

5. Si el área de un pentágono regular es de 1453 cm^2 y su apotema mide 20 cm. ¿Qué valor tiene cada lado?

6. En un polígono regular, el perímetro es igual a $27\sqrt{3}\ cm$ y cada uno de sus lados miden $3\sqrt{3}$ cm, ¿Cuántos lados tiene el polígono?

7. Dado un polígono regular de 15 lados, hallar: a) el ángulo central, b) el ángulo exterior, c) el ángulo interior.

8. Si el ángulo externo de un polígono regular es de 40º , Hallar: a) el ángulo central, b) el número de lados, c) el ángulo interior.

9. Si el área de un hexágono regular es igual a $150\sqrt{3}cm$, hallar la medida:

a) del lado, b) de su radio, c) de su apotema.

10. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de 5 m de lado?

11. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 8 m?

12. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de 28 m de largo y 21 m de ancho?

Instrumento de evaluación

Para evaluar el logro de las competencias genérica y disciplinar (mismas que se enuncian al inicio del bloque y en la sección "de entrada" de la secuencia didáctica 3.1, respectivamente), utiliza el siguiente **cuadro de Semaforización**, marcando el logro de dichas competencias con una palomita en el color correspondiente.

Competencia genérica.		
5.1	Rojo	No sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, ni comprende como cada uno de los pasos para deducir y aplicar las fórmulas de las relaciones y propiedades de los ángulos en los polígonos, y la fórmula para calcular el área de un polígono, contribuyen en la solución de problemas.
	Amarillo	Presenta dificultades para seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, así como para comprender como cada uno de los pasos para deducir y aplicar las fórmulas de las relaciones y propiedades de los ángulos en los polígonos, y la fórmula para calcular el área de un polígono, contribuyen en la solución de problemas.
	Verde	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva para dar solución a problemas que involucran polígonos, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de ese objetivo.
Competencia disciplinar.		
1	Rojo	No construye ni interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran polígonos.
	Amarillo	Presenta dificultades para construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran polígonos.
	Verde	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran polígonos.

Inicio

Secuencia didáctica 2
CIRCUNFERENCIA

De entrada

Al término de esta secuencia podrás identificar los elementos asociados a una circunferencia que generan una serie de propiedades para aplicarlas en la solución de problemas.

De estas actividades obtendrás como evidencias de aprendizaje la deducción de las fórmulas para encontrar el perímetro de una circunferencia y el área del círculo correspondiente partiendo de los polígonos, así como los elementos de la circunferencia que generan una serie de propiedades. Asimismo, la aplicación de estas deducciones en la solución de problemas.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos

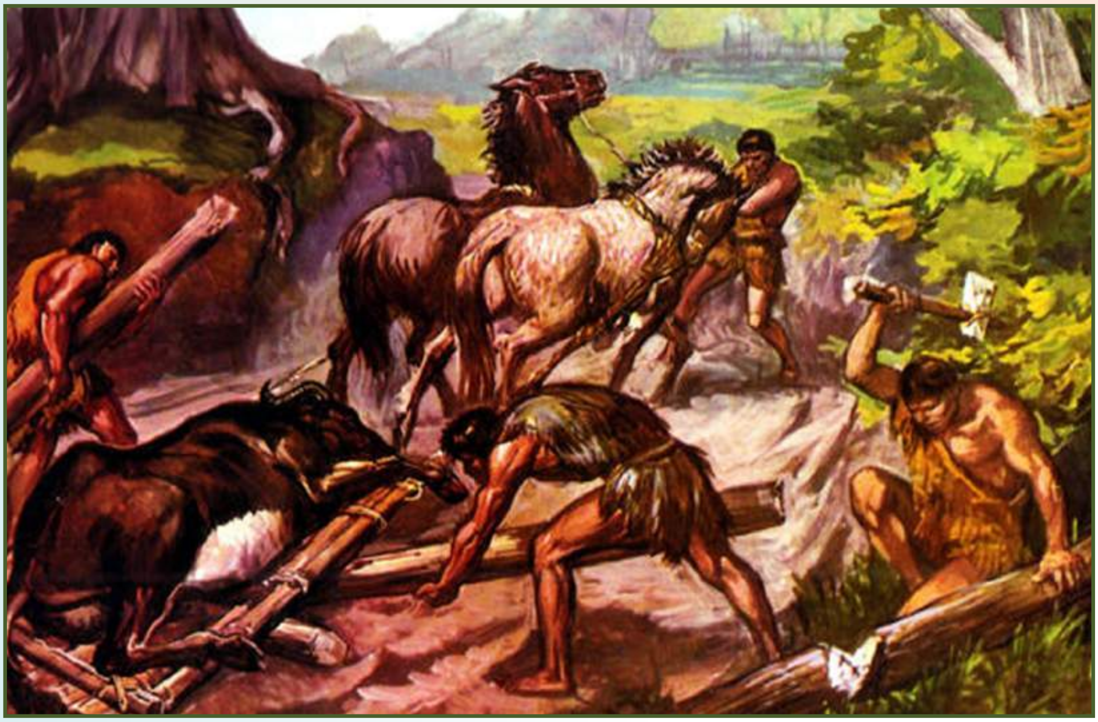
Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
    - Como producto principal, podrás resolver varias situaciones de nuestro entorno donde, para encontrar respuesta, se requiera el conocimiento de los elementos y propiedades de los diversos tipos de ángulos en la circunferencia.

ACTIVIDAD 1
SD2-B3

Valorando el invento de la rueda

Observa la siguiente imagen y responde a lo solicitado.



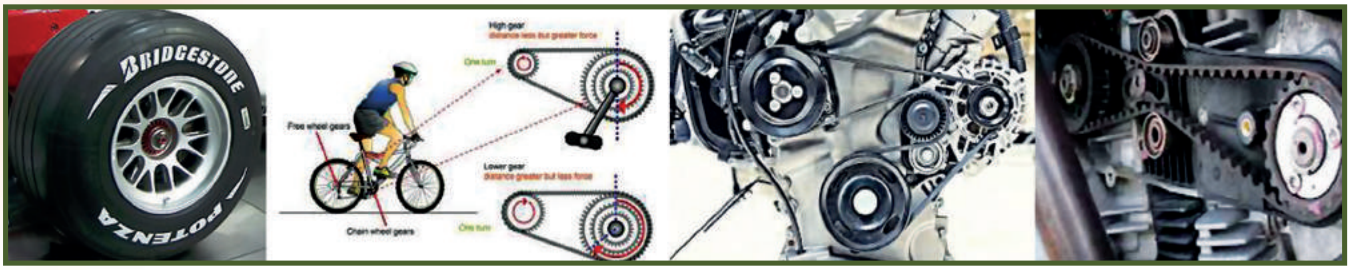
1. Describe la imagen. ____
____
____

2. Con respecto a la imagen ¿Qué beneficios trajo al hombre el invento de la rueda? Explica. ____
____
____

3. ¿De qué beneficios gozas hoy por el invento de la rueda? Menciona ejemplos. ____________
____
____

La rueda es una pieza mecánica circular que gira alrededor de un eje. Puede ser considerada una máquina simple y forma parte de diversas máquinas.

Sin duda alguna, el invento de la rueda ha beneficiado a la humanidad en muchos sentidos, entre ellos, los medios de transporte tanto terrestres como aéreos: llantas y poleas que hacen mover todo un sistema: empaques, tuberías, anillos, tapones, (cuya sección trasversal tiene forma de circunferencia),etc. Una civilización industrializada es inconcebible sin el invento de la rueda.

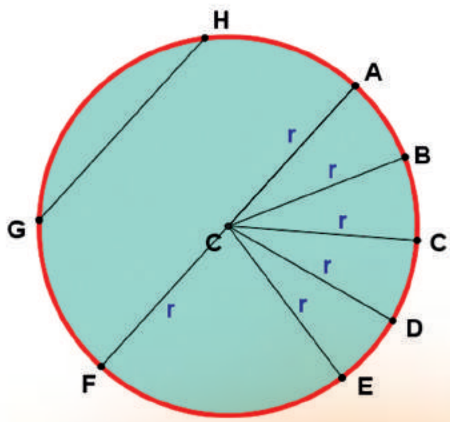


En esta secuencia se analizará lo que el hombre ha descubierto respecto a la circunferencia, sus elementos y las propiedades asociadas a esos elementos, que le han ayudado a hacer innovaciones que beneficien su vida cotidiana, específicamente aquello que te servirá en tu desempeño académico.

A continuación se define circunferencia y círculo, con apoyo de la figura que aparece abajo.

Circunferencia (Línea curva de color roja): es el conjunto de todos los puntos del plano (A, B, C, D, E, F, G H, etc.) que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto fijo llamado centro (C). La distancia del centro a cualquier punto que pertenece a la circunferencia se le llama radio de la circunferencia y se denota con la letra “r“ , siendo esta distancia siempre la misma.

Círculo (área sombreada de color azul): es el área delimitada por la circunferencia, es decir, es el conjunto de puntos interiores de la circunferencia, incluyéndola.



Existen elementos asociados a la circunferencia que generan una serie de propiedades. Unos elementos se definen a continuación y otros se definirán en el momento de ser utilizados en el desarrollo de las actividades. Los elementos son: radio, cuerda, diámetro, secante, tangente, arco, ángulo central, ángulo inscrito, ángulo semi-inscrito, ángulo exterior.

Arco: es una parte de la circunferencia (ejemplo arco AB).

Cuerda: es el segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia (ejemplos: segmentos AF, GH)

Diámetro: es la cuerda mayor de una circunferencia (segmento AF), es decir, es el segmento de recta que une a dos puntos de la circunferencia y contiene al centro. El diámetro mide dos veces el radio.

Semi-circunferencia: la mitad de una circunferencia (arco AF).

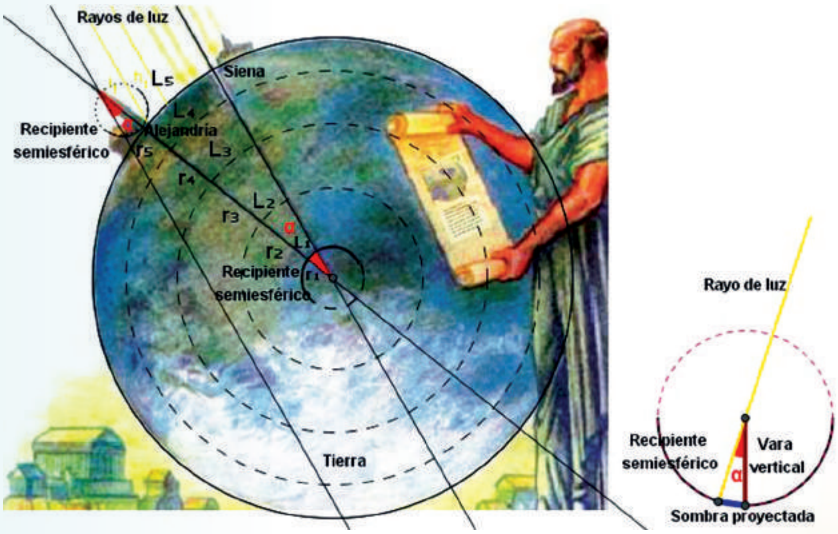
Semi-círculo: la mitad de un círculo, es decir, el área delimitada por una semicircunferencia.

Desarrollo

ACTIVIDAD 2
SD2-B3

Perímetro de la circunferencia y área del círculo correspondiente.

Eratóstenes y el cálculo del radio de la tierra.



En el bloque 1 se trató lo relacionado a Eratóstenes y la medición del radio de la tierra, es decir, el procedimiento y consideraciones que tomó para calcular el radio de la tierra, cuya medida estimada es muy aproximada a la que se tiene hoy en día. Son varias las teorías que existen en cuanto a las mediciones que realizó Eratóstenes al respecto, tal como se explicó en el bloque 1. Otra teoría posible (ver figura) dice que Eratóstenes colocó un recipiente semiesférico (llamado scaphe, que podía manipular) en Alejandría con una vara vertical (Gnomon) en el centro y midió el arco de la sombra proyectada por la vara en el interior del mismo, cuya medida fue de un cincuentavo de los 360º de circunferencia completa del recipiente; después dibujó el recipiente en el centro de la circunferencia de la tierra en el esquema en papel que Eratóstenes había construido y donde anotaba sus observaciones y cálculos; hizo coincidir el ángulo $\propto$ medido en el recipiente con el formado en el centro de la tierra, ya que estos ángulos son iguales por ser alternos internos como se estudió en el Bloque 1. Dibujó una serie de circunferencias cuyos radios, arcos y ángulo $\propto$ podía manipular para analizar la relación entre la longitud de arco (L) formada por el ángulo $\propto$ y el radio de la circunferencia correspondiente y así estar en condiciones de establecer una relación entre el arco formado entre Siena y Alejandría, el radio de la tierra y el ángulo $\propto$. El esquema se muestra en la figura.

Llegó a la conclusión que la proporción entre el arco de cada circunferencia y el radio correspondiente, era una constante, y que esa constante era el ángulo ∝ medido en radianes:

$$\propto = \frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} = \frac{L_3}{r_3} = \frac{L_4}{r_4} = \frac{L_5}{r_5} = \frac{L}{r}$$

Estadística en corto.

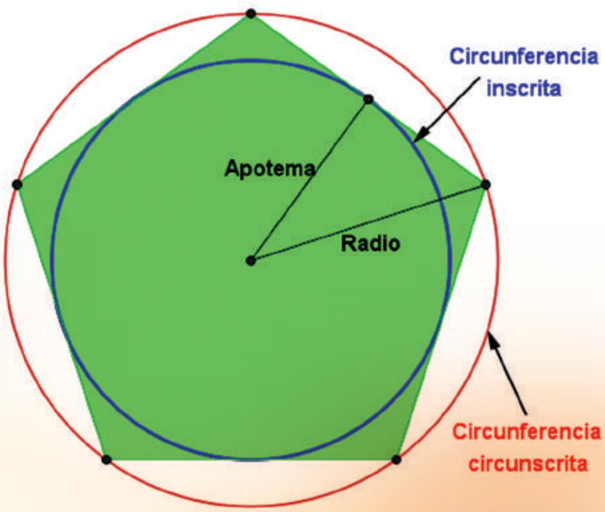
Un radián equivale a 57.3º aproximadamente. En el siguiente Bloque se ampliará la información respecto al radián.

La medida del ángulo ∝ en su caso fue de 7.2º, equivalente a 0.1256 radianes. Con este dato y conociendo el arco formado entre Alejandría y Siena,cuya medida era de 5000 estadios (800 km), calculó el radio(**r**) de la tierra:

$$r = \frac{L}{\propto} = \frac{800}{.1256} = 6369.42\ km$$

De esta manera, podemos decir que el arco L que subtiende un ángulo central ∝ en una circunferencia de radio **r**, está dado por la relación $L = \propto r$, donde ∝ está medido en radianes.

¿Sabías qué...?



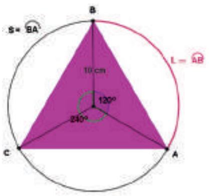
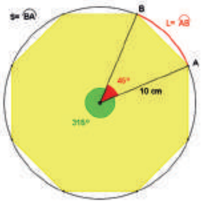
Los polígonos regulares tienen la propiedad de tener una circunferencia inscrita (cuyo radio es el apotema del polígono) y otra circunscrita (cuyo radio es el radio del polígono).

Los ángulos conjugados suman 360º.Por ejemplo, el conjugado de 120º es 240º

ACTIVIDAD 3
SD2-B3

La práctica hace al maestro

Organizados en binas, llenen la siguiente tabla según los encabezados de cada columna y según los ejemplos mostrados. Después respondan a las preguntas planteadas.

Polígono regular.	Dibujo del polígono con ángulo central y radio de la circunferencia circunscrita de r=10 cm (este radio también es el radio del polígono).	Ángulo central del polígono (que equivale al ángulo central de la circunferencia circunscrita) medido en:		Longitud (L) de arco subtendida por dos radios que forman el ángulo central. El arco es una parte de la circunferencia (En este caso el arco AB).Aplica $L=\propto r$.	Ángulo conjugado del ángulo central, medido en		Longitud (S) de arco del ángulo conjugado al ángulo central. Aplica $S=\propto r$.	Suma de las longitudes de arcos L y S (equivale al perímetro "P" de la circunferenciacircunscrita) .
		grados	radianes $\propto$.		grados	radianes $\propto$.		
Triángulo equilátero.		120°	2.094	L= (2.094)(10)=20.94	240°	4.1884	S= (4.1884)(10)=41.884	P= 62.824 =(L)(3)
Pentágono.								
Hexágono.								
Octágono.		45°	0.785	7.85	315°	5.4973	54.973	P=62.823
Icoságono.			0.3141	3.141				
Polígono de 100 lados (Hectágono)			0.0628			6.2198	62.198	
Polígono de 1000 lados				0.0628				

ACTIVIDAD 3 SD2-B3 ...CONTINUACIÓN

Contesten las siguientes preguntas con base en el llenado de la tabla anterior:

a) ¿Cómo varía la medida del ángulo central y su respectiva longitud de arco (L), a medida que se incrementa infinitamente el número de lados del polígono?

b) ¿A qué valor de ángulo, medido en grados y en radianes, se aproxima el conjugado del ángulo central a medida que se incrementa infinitamente el número de lados del polígono?

c) Con base al valor de π, el valor en radianes del inciso anterior ¿Cuántos π aproximadamente representa? Redondear el resultado al entero próximo.

d) ¿A qué valor se aproxima la longitud de arco (S), a medida que se incrementa infinitamente el número de lados del polígono?

e) ¿Cuántas veces cabe aproximadamente el radio de la circunferencia circunscrita (o el radio de cualquier polígono) en el perímetro de la circunferencia cuando el número de lados del polígono se incrementa infinitamente? En la tabla, el valor del radio de la circunferencia circunscrita mide 10 cm.

f) Con base al valor π ¿Cómo puedes expresar el resultado del inciso anterior? Es decir, ¿Cuántos π representa aproximadamente? Redondear el resultado al entero próximo.

g) Con base al procedimiento que utilizaron para dar respuesta a los **dos** incisos anteriores, deduce una fórmula para obtener el perímetro de la circunferencia circunscrita.

h) La fórmula deducida en el inciso anterior, ¿Se puede aplicar para obtener el perímetro de cualquier circunferencia? Investigar la fórmula establecida para obtener el perímetro de una circunferencia ¿Coincide con la fórmula que han deducido?

i) ¿A qué área se aproxima el área del polígono si se incrementa infinitamente el número de lados?

j) ¿A qué medida de la circunferencia se aproxima el apotema del polígono a medida que se incrementa infinitamente el número de lados del polígono?

k) ¿A qué medida de la circunferencia se aproxima el perímetro del polígono a medida que se incrementa infinitamente el número de lados del polígono?

l) Con base a las respuestas a los dos incisos “g”, “j” y “k” , aplica la fórmula deducida en la actividad 6 de la secuencia didáctica 3.1 (la cual sirve para obtener el área de un polígono regular) y propón una expresión algebraica para calcular el área aproximada del círculo correspondiente a la circunferencia circunscrita al polígono, cuando el número de lados del polígono crece infinitamente.

m) La fórmula deducida en el inciso anterior ¿Se puede aplicar para calcular el área de cualquier círculo? Investiga la fórmula establecida para obtener el área de un circulo ¿Concuerda con la deducida en esta actividad?

Para comprobar la validez de la fórmula establecida en el inciso “g”, calculen el perímetro de la circunferencia circunscrita de manera directa. ¿Coincide el resultado con el de la tabla? Calcula el área del círculo correspondiente.

La práctica hace al maestro

ACTIVIDAD 4
SD2-B3

Organizados en binas, resuelvan los siguientes problemas, aplicando las fórmulas obtenidas en actividad anterior, para calcular el área del círculo y el perímetro de la circunferencia y la establecida por Eratóstenes para calcular la longitud de arco.

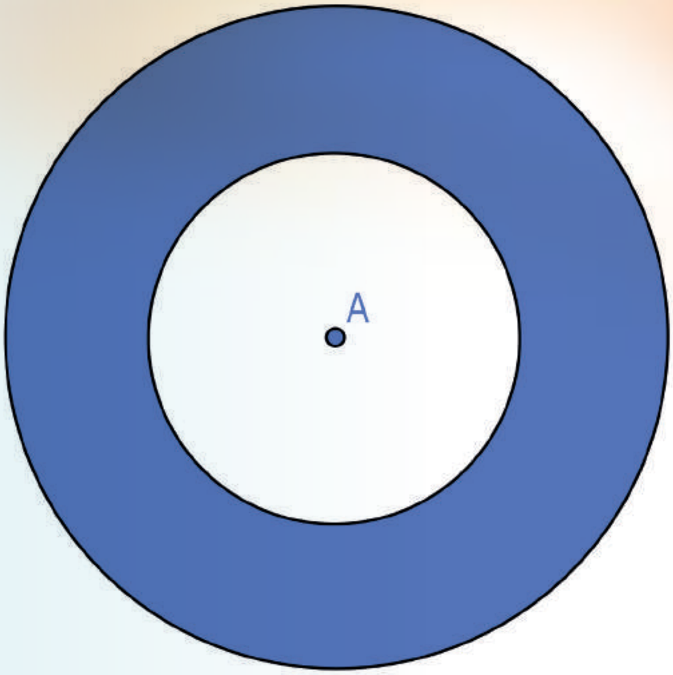
1. Calcula el perímetro de la circunferencia y el área del círculo correspondiente, si su radio mide 25 cm.

2. Si el perímetro de una circunferencia es de 94 cm, ¿Cuál es la medida del radio y el área del círculo correspondiente?

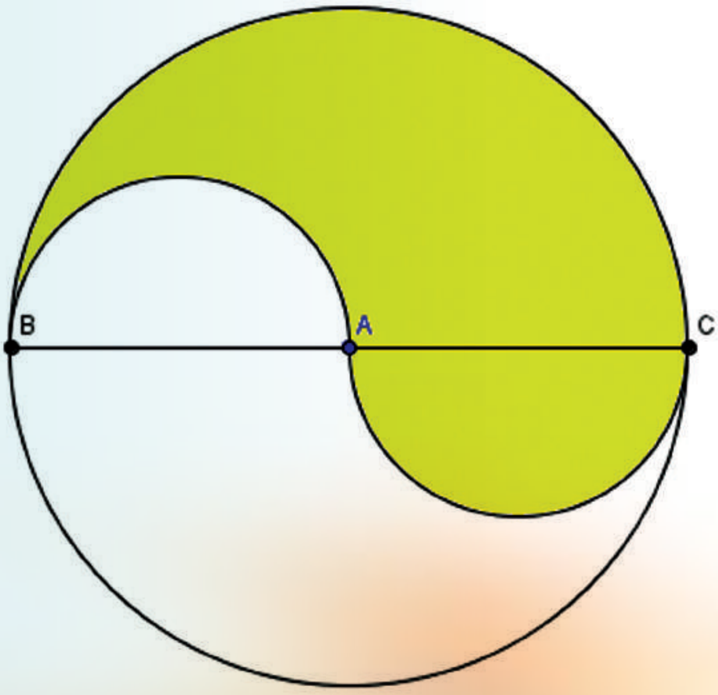
3. Si el área de un círculo es de 530.93 cm, ¿Cuánto mide el radio y el perímetro de la circunferencia correspondiente?

4. En una página de internet se ponen a la venta juegos mecánicos, entre los que se encuentra un carrusel con 20 caballitos, distribuidos por pares como se muestra en la fotografía publicada. El carrusel tiene un diámetro de 5 metros. Para diseñar el carrusel, el fabricante tuvo que calcular la longitud de arco entre un par de caballitos y el otro par consecutivos. Calcula dicha longitud de arco.

5. Calcula el área de la corona circular (área sombreada en la figura) formada por dos circunferencias concéntricas (tienen el mismo centro) si sus radios son de 4 y 7 cm respectivamente.



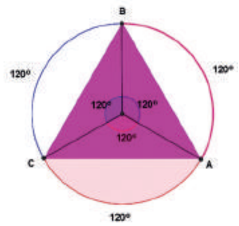
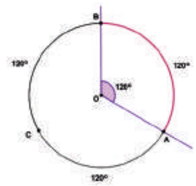
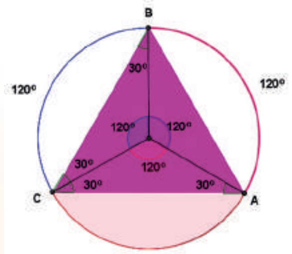
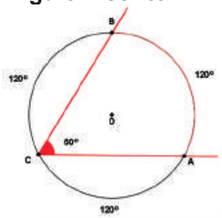
6. Sobre una circunferencia que tiene el punto A como centro y cuyo diámetro BC mide 20 cm, se han trazado semicircunferencias de diámetro AC=AB=10 cm. Calcula área y perímetro de la región sombreada.

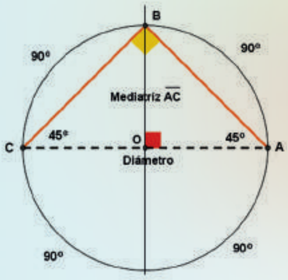
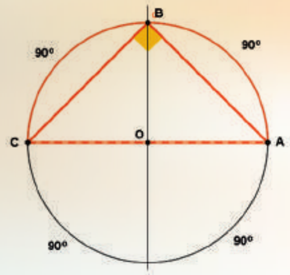


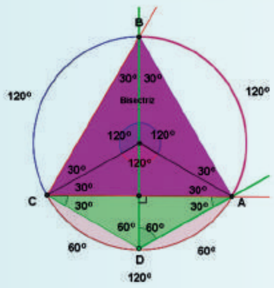
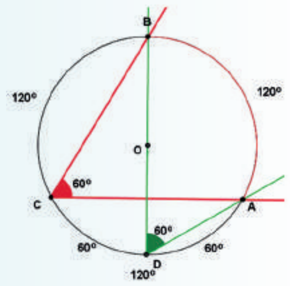
ACTIVIDAD 5
SD2-B3

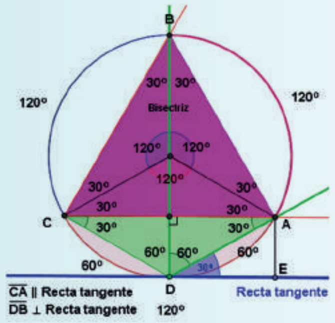
La práctica hace al maestro

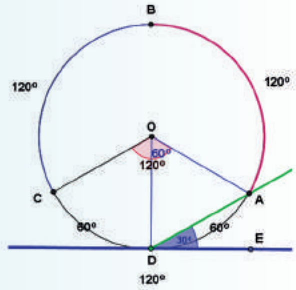
A continuación se enlistan las **Propiedades de los diversos tipos de ángulos en la circunferencia** explicadas mediante un ejemplo específico que se puede generalizar para cualquier caso que cumpla con las características de la propiedad enunciada. Una vez analizada la información contenida en la siguiente tabla, se solicita den respuesta a los ejercicios planteados.

Figura Ilustrativa de un caso específico.	Diversos tipos de ángulos en la circunferencia. **Caso específico.**	Relación de la medida del ángulo con la medida del arco de circunferencia correspondiente medido en grados del caso específico.	**Generalización.** (ángulo medido en grados y arco de circunferencia correspondiente medido en grados). **Propiedades.**
	**Ángulo central AOB**  El ángulo central en una circunferencia, es aquel cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios. Este ángulo es también el ángulo central del polígono inscrito en la circunferencia.	120°=120°	$< AOB = \widehat{AB}$ El ángulo central de una circunferencia tiene por medida el arco que lo determina.
	**Ángulo Inscrito ACB**  El ángulo inscrito es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas. Una cuerda es el segmento de recta que une a dos puntos de la circunferencia, en la figura las cuerdas son los segmentos CA y CB.	$\frac{120°}{2} = 60°$	$< ABC = \frac{\widehat{AB}}{2}$ $< ABC = \frac{< AOB}{2}$ El ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco que lo determina y también mide la mitad del ángulo central correspondiente.

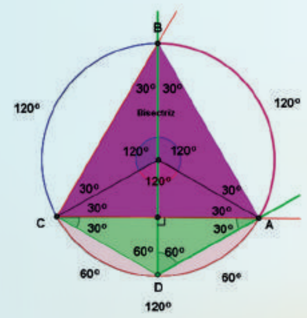
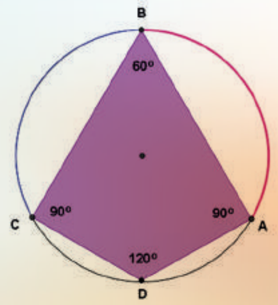
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Ángulo inscrito ABC en una semicircunferencia.

</td>
<td>$$\frac{180°}{2} = 90°$$</td>
<td>$< ABC = \frac{\widehat{AC}}{2} = 90°$

El ángulo inscrito determinado por una semicircunferencia es recto.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Ángulos inscritos ($< ACB$ y $< ADB$) determinados por el mismo arco $\widehat{AB}$.

</td>
<td>$$\frac{120°}{2} = 60°$$</td>
<td>$< ACB =$
$< ADB = \frac{\widehat{AB}}{2}$

Ángulos inscritos determinados por el mismo arco miden lo mismo.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Recta tangente: es la recta que toca a la circunferencia en un punto. A este punto se le conoce como punto de tangencia. La recta tangente tiene la propiedad de ser perpendicular al radio formado por el centro y el punto de tangencia.</td>
<td>Ángulo semi-inscrito EDA


Un ángulo semi-inscrito es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son una secante (recta que pasa por A y D) y una tangente (recta que pasa por los puntos D y E).
Una secante es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos (en este caso la secante pasa por los puntos D y A).</td>
<td>$$\frac{60°}{2}$$</td>
<td>$<EDA = \frac{\widehat{DA}}{2} = \frac{< DOA}{2}$

Un ángulo semi-inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco que determina a su correspondiente ángulo central, o bien, la mitad del ángulo central.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia
<ABC y <CDA, o bien,
<DAB y <DCB

</td>
<td>60°+120°=180°

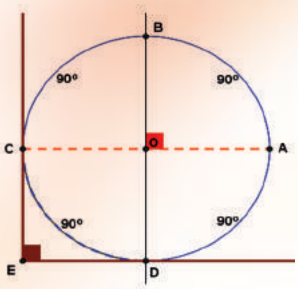
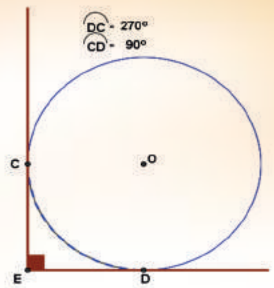
O bien,

90°+90°=180°</td>
<td>$< ABC + < CDA = 180°$

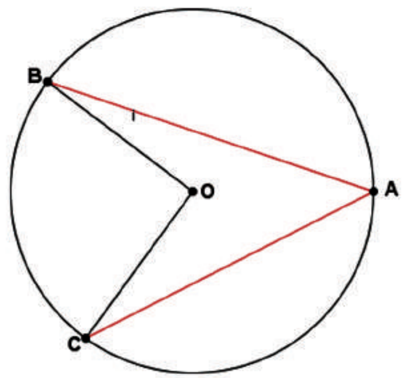
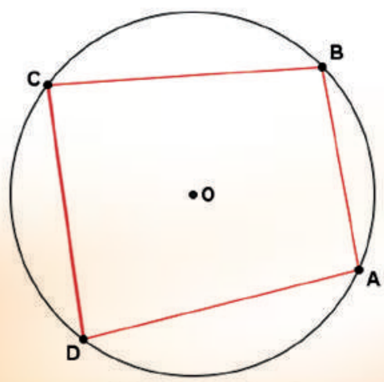
o bien,

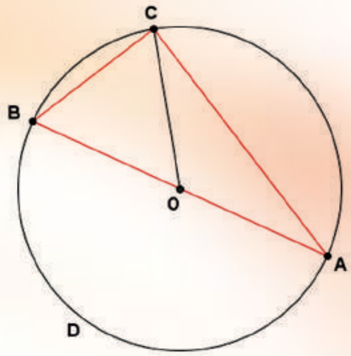
$< DAB + < DCB = 180°$

Ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.</td>
</tr>
</table>

	Ángulo exterior DEC  Un ángulo exterior es el que tiene su vértice fuera de la circunferencia y puede estar formado por: dos secantes, dos tangentes, o bien por una secante y una tangente. En la figura el ángulo exterior está formado por dos tangentes.	$\frac{270° - 90°}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$	$< DEC = \frac{\widehat{DC} - \widehat{CD}}{2}$ La medida de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

Considerando las propiedades de los diversos tipos de ángulos en la circunferencia, y organizados en binas, resuelvan cada uno de los problemas especificados.

Problema.	**Figura cuyas medidas varían según el problema especificado.**
1. Si $< BAC$=40° , determina la medida del $< BOC$. 2. Si $< BOC$ =70°, ¿Qué medida tiene el $< BAC$? 3. Si $\widehat{BC}$ =100°, determina $< BAC$. 4. Si $\widehat{BC}$ =120°, ¿Qué medida tiene el $< BOC$?	 El punto O es el centro de la circunferencia
5. Si $\widehat{CD}$= $< ABC$ =100°, ¿Cuánto mide $\widehat{DA}$? 6. Si $< BCD$ =76°, ¿Qué medida tiene el arco $\widehat{BCD}$? 7. Si $< DAB$ =90°, Determina la medida del arco $< \widehat{DAB}$	 El punto O es el centro de la circunferencia

8. Si $< COB$ =70°, Determina: $< AOC$, $\widehat{AC}$, $\widehat{CB}$, $\widehat{BA}$, $< CAB$, $< ABC$, $< ACB$.	 El punto O es el centro de la circunferencia

Logros

Cierre

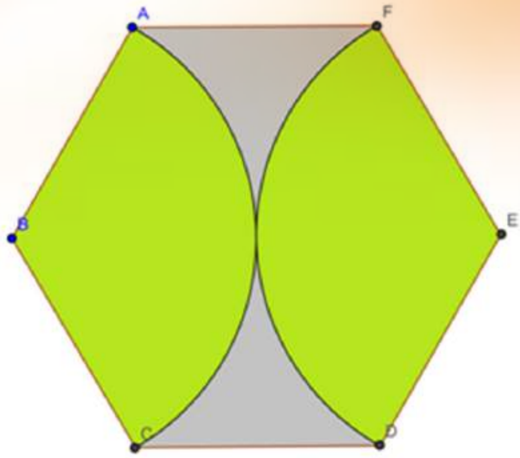
Guarda tus respuestas y procedimientos en tu portafolio.

ACTIVIDAD 6
SD2-B3

En tu cuaderno y de manera ***individual***, resuelve los siguientes problemas:

1. Calcula el perímetro de la circunferencia y el área del círculo correspondiente, si su radio mide 36 cm.
2. Si el perímetro de una circunferencia es de 120 cm, ¿Cuál es la medida del radio y el área del círculo correspondiente?
3. Si el área de un círculo es de 1267.45 cm, ¿Cuánto mide el radio y el perímetro de la circunferencia correspondiente?
4. Calcular el perímetro y área de un círculo, si un hexágono regular de 5 cm de lado está inscrito en el mismo.
5. En un polígono regular determinar el valor de la apotema, si el diámetro de la circunferencia inscrita es de 25 cm.
6. En un polígono regular determinar el radio de la circunferencia inscrita, si su apotema es de $7\sqrt{3}\,cm$.
7. Al norte de la ciudad de Hermosillo, Sonora, se está preparando el terreno para la construcción de casas en un fraccionamiento. Para compactar la tierra, se está utilizando una aplanadora cuyo tambor mide 1.55 metros de diámetro y 2.13 metros de ancho. Calcula el área aplanada cuando el tambor da 30 vueltas.

8. Se desea regar un jardín que tiene forma de hexágono regular cuyo lado mide 6 metros. Se habrán de colocar dos aspersores uno en el vértice B y otro en el vértice E. ¿Qué cantidad de área (parte gris) no se riega?



9. En la sala de una casa se encuentra una pintura enmarcada que mide 110 cm por 80 cm. Si el marco tiene un ancho de 10 cm, el área del marco mide:

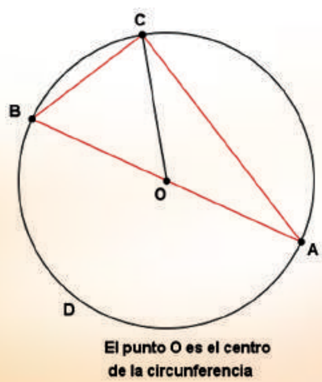
10. En la siguiente figura, responde a lo solicitado.

a) Si < BOC = 50°, ¿Qué medida tiene < AOC?

b) Si < OBC = 44° ¿Cuánto mide < AOC?

c) Si < AOC = 120°, Encuentra la medida del < COB.

d) Si < CAB = 25°, Determina $\widehat{AC}$.



Instrumento de evaluación

Para evaluar el logro de las competencias genérica y disciplinar (mismas que se enuncian al inicio del bloque y en la sección "de entrada" de la secuencia didáctica 3.2, respectivamente), utiliza el siguiente **cuadro de semaforización**, marcando el logro de dichas competencias con una palomita en el color correspondiente.

Competencia genérica.		
5.1		No sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, ni comprende como cada uno de los pasos para deducir y aplicar las fórmulas de las propiedades que se generan a partir de los elementos de una circunferencia, y la fórmula para calcular el área de un círculo y el perímetro de una circunferencia, contribuyen en la solución de problemas.
		Presenta dificultades para seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, así como para comprender como cada uno de los pasos para deducir y aplicar las fórmulas de las propiedades que se generan a partir de los elementos de una circunferencia, y la fórmula para calcular el área de un círculo y el perímetro de una circunferencia, contribuyen en la solución de problemas.
		Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva para dar solución a problemas relacionados con la circunferencia, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de ese objetivo.
Competencia disciplinar.		
1		No construye ni interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran el tema de la circunferencia.
		Presenta dificultades para construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran el tema de la circunferencia.
		Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales que involucran el tema de la circunferencia.

AUTOEVALUACIÓN

Selecciona la opción correcta en cada uno de los siguientes planteamientos:

1. Si el radio de una circunferencia es de 6400 km, y el ángulo formado por dos de sus radios es de 7.2º, el arco de circunferencia comprendido entre los dos radios , mide aproximadamente:

   A) 804 Km. B) 1608 Km. C) 40212 Km. D) 46080 Km.

2. En el centro de la Ciudad de Hermosillo, Sonora, se encuentra el Parque Infantil que cuenta con una rueda de la fortuna con 12 góndolas (asientos) y con un diámetro de 8 metros; la longitud de arco que une una góndola con la otra mide:

   A) 1.047 metros B) 2.094 metros C) 3.4214 metros D) 4.1887 metros

3. El área de una circunferencia inscrita en un hexágono regular de radio 12 cm, es de:

   A) 18π B) 36π C) 108π D) 180π

4. El valor del ángulo interior del heptágono regular es de:

   A) 51º25´42” B) 64º17´08” C) 85º13´46” D) 128º34´17”

5. La suma de los ángulos interiores del decágono regular es de:

   A) 360º B) 720º C) 1440º D) 1800º

6. El polígono regular cuyo ángulo interior es de 140º, por su número de lados recibe el nombre de:

   A) Heptágono B) Octágono C) Eneágono D) Dodecágono

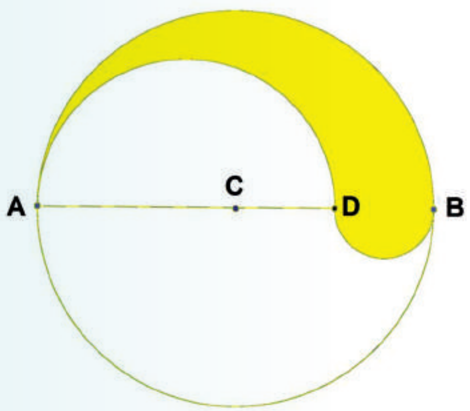
7. El área del hexágono regular de lado 7 cm, es de:

A) 127.30 cm^2 B)164.35 cm2 C) 294.00 cm2 D) 771.75 cm^2

8. Si el radio de un octágono regular mide 18.29 cm y su apotema 16.89 cm, el perímetro aproximado del polígono es de:

A) 56.1432 cm B) 112.2864 cm C) 398.3313 cm D) 788.0320 cm

9. Sobre una circunferencia que tiene el punto C como centro y cuyo diámetro AB mide 12 cm, se han trazado semicircunferencias de diámetros DB (equivalente a un cuarto del diámetro AB) y AD (equivalente ¾ de AB). El área y perímetro respectivamente de la región sombreada es:



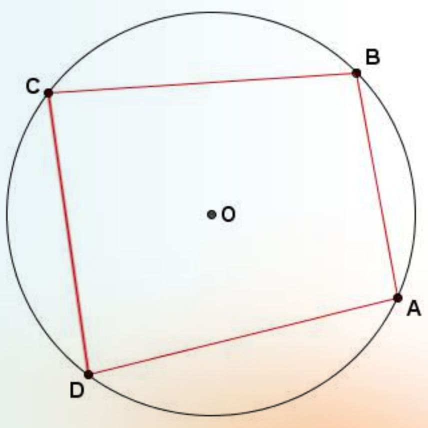
A) 9 $\pi\ cm^2$, 3 $\pi\ cm$

B) 9 $\pi\ cm^2$, 12 $\pi\ cm$

C) 36 $\pi\ cm^2$, 3 $\pi\ cm$

D) 36 $\pi\ cm^2$, 6 $\pi\ cm$

10. En la figura, si $< BCD = 85^o\ y\ \widehat{BC} = 98^o$, la medida de $\widehat{CD}$ es de:



El punto O es el centro de la circunferencia

A) 48º B) 57º C) 75º D) 92º

Instrumento de evaluación

Al final del Módulo aparecen las respuestas de este apartado (autoevaluación) con la finalidad de que evalúes tu desempeño en este bloque, mediante la siguiente escala estimativa:

Si de la actividad anterior respondiste correctamente todos los reactivos considera tu resultado **EXCELENTE** si fueron 9 los reactivos que contestaste correctamente considera tu resultado como **MUY BUENO**, si fueron 8 considera tu resultado **BUENO**, de 6 a 7 como **REGULAR** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **INSUFICIENTE**, lo que exige que es necesario refuerces el contenido de este bloque.

<table>
<tr><td rowspan="5">¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos en función de las respuestas correctas que tuviste?

(Señala con una ✓según sea el número de reactivos correctamente contestados)

Competencia genérica y atributo:

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Esta competencia será alcanzada si obtienes un desempeño BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE.</td><td>EXCELENTE.</td><td></td></tr>
<tr><td>MUY BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>REGULAR.</td><td></td></tr>
<tr><td>INSUFICIENTE.</td><td></td></tr>
</table>

Si tu resultado fue **BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE** te felicitamos y te motivamos a que sigas esforzándote como lo has hecho y, obviamente, que corrijas aquello que no te permitió alcanzar la excelencia; si tu desempeño fue **REGULAR O INSUFICIENTE**, refuerza tus conocimientos consultando de nuevo el contenido del bloque si lo consideras necesario. Además te invitamos a que te acerques a tu maestro o tus compañeros para que le solicites el apoyo para reforzar los temas en los que fallaste, asimismo, que acudas a asesorías en donde se te apoyará para que mejores tu desempeño y puedas obtener mejores resultados.

COEVALUACIÓN

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas y compara tus resultados y procedimientos con tres de tus compañeros.

I. En una circunferencia de radio 8 cm. está inscrito un octágono regular cuyo lado mide 6.123 cm.

1. Realiza un dibujo que represente el problema
2. Realiza los siguientes cálculos :
   a) Área y perímetro de la circunferencia circunscrita al polígono.
   b) Medida del ángulo central del polígono. Este ángulo, por su medida, ¿Qué nombre recibe?
   c) Medida del ángulo interior del polígono. Este ángulo, por su medida, ¿Qué nombre recibe?
   d) Suma de los ángulos interiores por dos procedimientos diferentes.
   e) Medida del apotema del polígono mediante Teorema de Pitágoras,
   f) Perímetro del polígono.
   g) Área del polígono por dos procedimientos diferentes.
3. Dentro del polígono se forman 8 triángulos. Los vértices de cada triángulo se ubican en el centro del polígono y en dos de los vértices consecutivos del polígono. Según la medida de sus lados y ángulos, ¿Qué nombre reciben estos triángulos?
4. Traza los ángulos exteriores del polígono y obtén su medida.
5. Calcula la suma de los ángulos exteriores del polígono.
6. Traza una circunferencia inscrita en el polígono y calcula su perímetro y área.
7. Calcula el área entre circunferencia circunscrita y polígono.
8. Calcula el área entre circunferencia inscrita y polígono.
9. Calcula el área de la corona circular formada por las circunferencias inscrita y circunscrita.
10. Medida de la longitud de arco de la circunferencia circunscrita, subtendido por dos radios del polígono. Utiliza dos procedimientos.

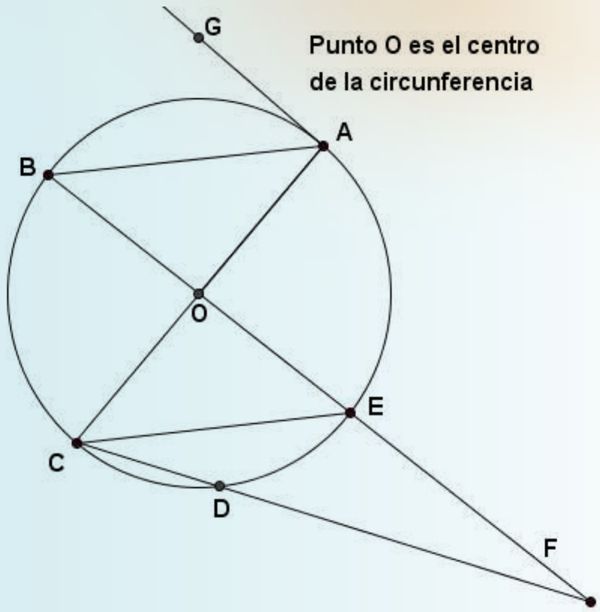
11. Medida de la longitud de arco de la circunferencia inscrita, subtendido por dos apotemas del polígono. Utiliza dos procedimientos.

12. Área del sector circular formada por dos radios del polígono y el arco correspondiente de la circunferencia circunscrita en el polígono.

13. Área del sector circular formada por dos apotemas del polígono y el arco correspondiente de la circunferencia inscrita en el polígono.

II. Se quiere retocar el marco de una pintura que se acaba de comprar en una tienda de segunda, ya que se encuentra en mal estado. Las dimensiones de la pintura son de 107 cm por 77 cm y el ancho del marco es de 6 cm, tal como se muestra en la figura. Calcula el área del marco que se requiere pintar.

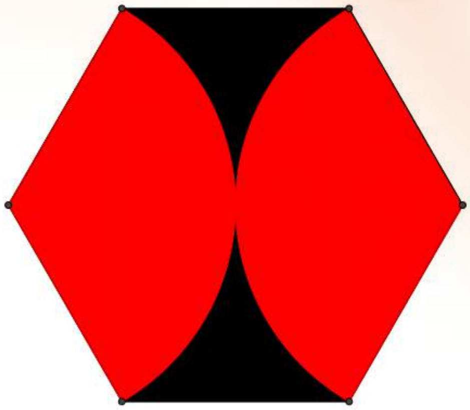
III. En la siguiente Figura, si $< ECA = 45^o$ y $\widehat{DE} = 45^o$,
Determine: $\widehat{EA}$, $< EBA, < AOB, < GAB, < BFC$

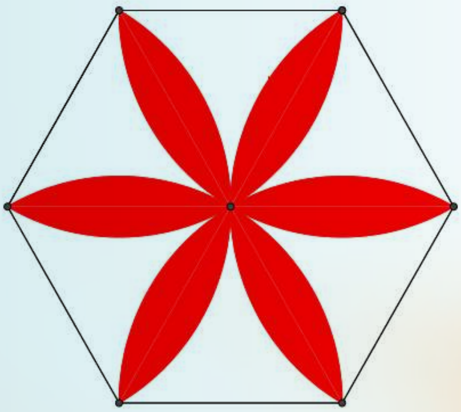


IV. Se tiene un hexágono cuyo lado mide 2 cm:

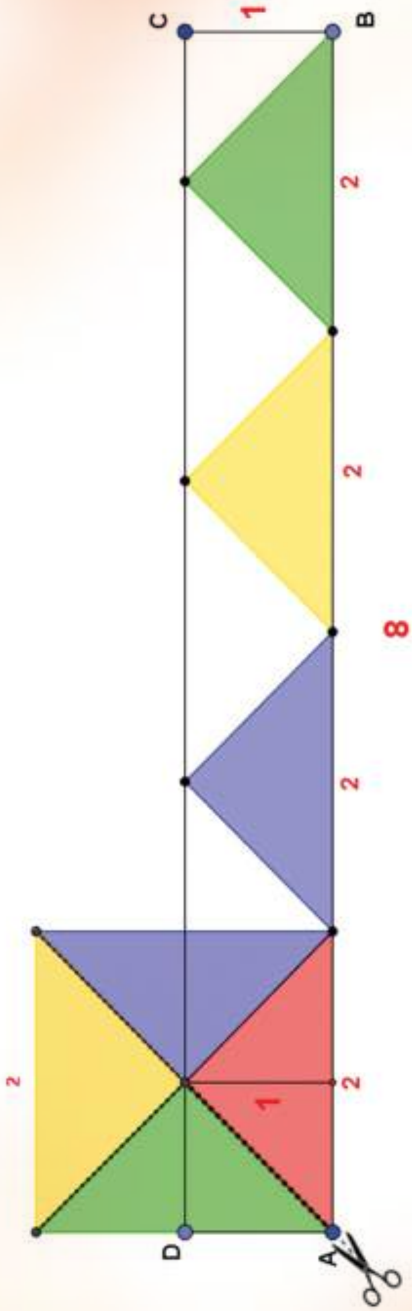
a) Calcula el área sombreada de color rojo.

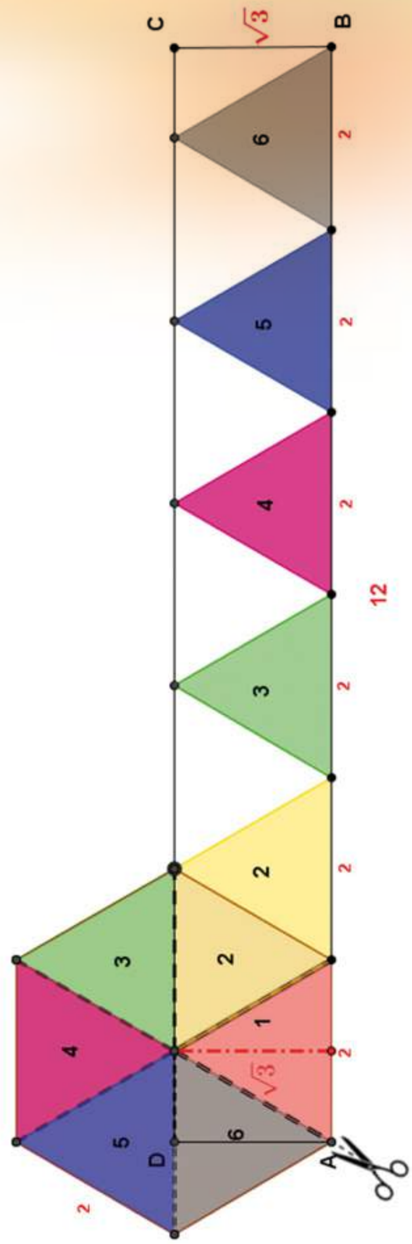
b) Calcula el área de la flor trazada en el interior del hexágono.

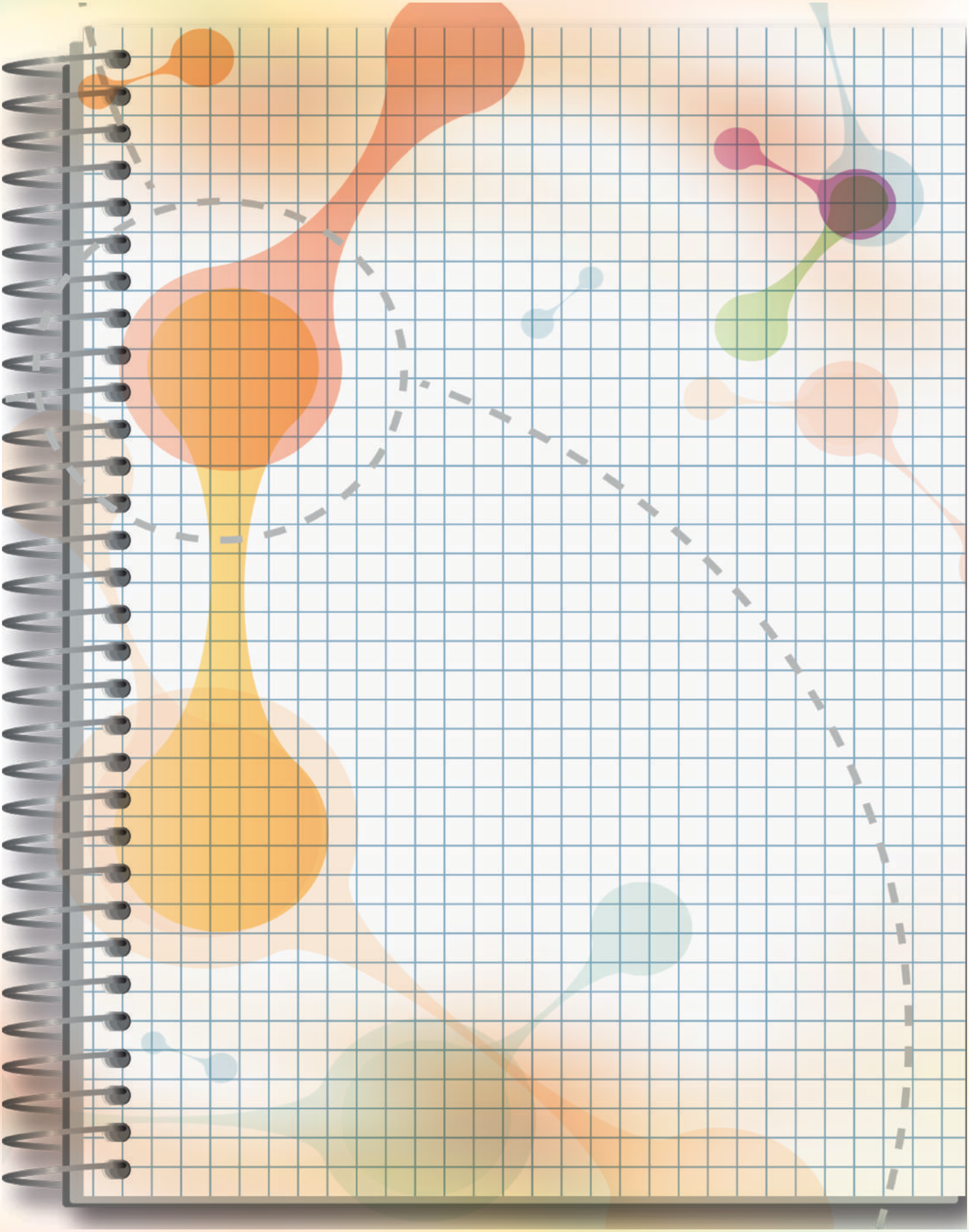


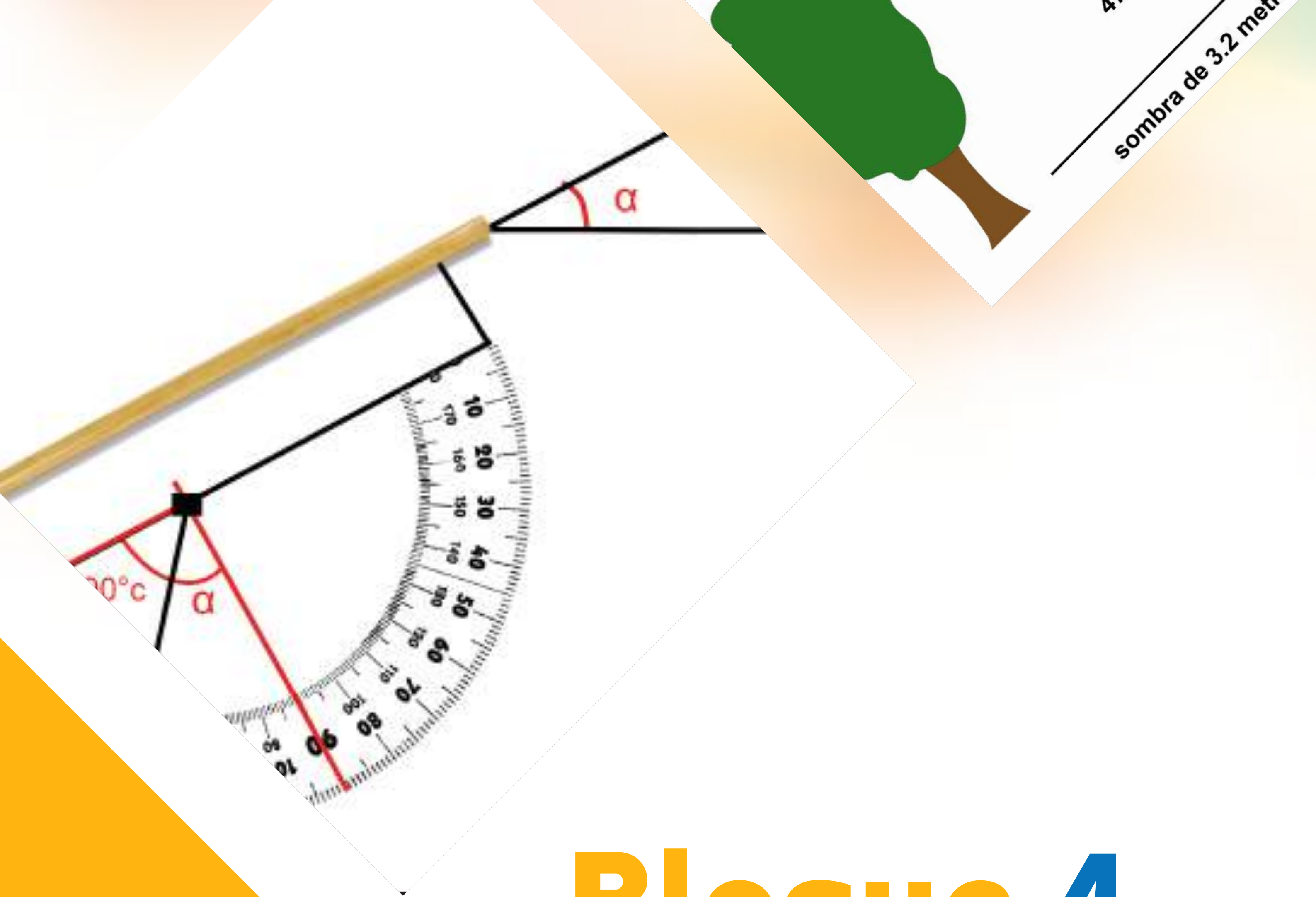


V. En el octágono regular siguiente, cuyo lado mide 2 cm, se han trazado arcos de circunferencia de radio 1, en cada uno de los ángulos interiores. El área sombreada es la misma que en la contenida en los tres círculos, cada uno de ellos de radio 1 cm. ¿Por qué?


C
1
B
2
2
8
2
2
1
2
D
A


C
$\sqrt{3}$
B
6
5
4
3
2
12
3
2
4
1
$\sqrt{3}$
5
6
D
A





Bloque 4

Resuelve Trigonometría I y II

Desempeño del estudiante ¿Cómo lo aprenderé?

- Identifica diferentes sistemas de medidas de ángulos.
- Describe las relaciones trigonométricas para ángulos agudos.
- Aplica las razones trigonométricas en ejercicios teóricos-prácticos.
- Identifica e interpreta las razones trigonométricas en el plano cartesiano.
- Reconoce las razones trigonométricas en el círculo unitario.
- Aplica las razones trigonométricas.
- Usando la calculadora como herramienta de exploración de resultados.

Tiempo asignado: 12 horas.

Objetos de aprendizaje ¿Qué aprenderé?

- Sistema sexagesimal y circular.
- Razones trigonométricas directas y reciprocas de ángulos agudos.
- Calculo de valores de funciones trigonométricas para 30°, 45° y 60° y sus múltiplos.

Competencias disciplinares a desarrollar Me servirá para:

- Resolución de triángulos rectángulos.
- Razones trigonométricas en el plano cartesiano.
- Círculo unitario.
- Identidades trigonométricas.
- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Instrucciones: En la siguiente actividad contesta lo que se te pide.

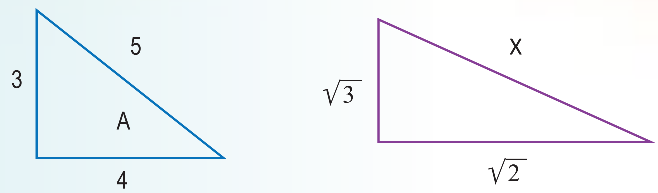
1. Convierte a forma decimal los siguientes ángulos.

   a) 25°30´15´´ ______________________

   b) 13°56´_________________________

   c) 23°12´_________________________

2. Indica para cada uno de los siguientes triángulos, cuál es el valor de los ángulos, catetos y la hipotenusa marcados como incógnita.



3. Grafica los siguientes ángulos en el plano cartesiano.

   a) 30°
   b) 130°
   c) 200°
   d) 280°

4. Utiliza la calculadora y encuentra el valor decimal de las siguientes funciones trigonométricas.

   a) $sen\ 43° =$
   b) $cos\ 28° =$
   c) $tan\ 16° =$
   d) $tan\ 45° =$
   e) $sen\ 30° =$
   f) $cos\ 60° =$

5. Halla el valor del ángulo en grados.

   a) $sen\ Ø = 0.4383$
   b) $cos\ Ø = 0.7071$
   c) $tan\ ß = 0.1015$
   d) $tan\ \delta = 4.3315$

Instrumento de evaluación

Lista de cotejo

Nombre del alumno: ____ grupo/turno: _____________

Tema evaluado: ____

Asignatura: ____________________________________ parcial: __________________ bloque: ___________

Fecha de entrega: ____ puntaje alcanzado: _______________

Instrucciones: marca con una palomita en cada espacio donde se presente el atributo	
	1. Cuenta con la lista de cotejo impresa y llena con los datos de identificación del elaborador.
	2. Presenta los ejercicios resueltos de manera limpia, clara y legible.
	3. Resuelve correctamente los ejercicios. Otorgar un punto por cada una.
	Total de desempeños.

Inicio

Secuencia didáctica 1

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y SU GENERALIZACIÓN

De entrada

Al término de esta secuencia identificarás las unidades que se utilizan para medir ángulos y describirás las diferencias conceptuales entre unidades de medida angulares y circulares. También describirás y definirás las razones directas y reciprocas de ángulos agudos e identificarás las razones trigonométricas en el plano cartesiano, en el círculo unitario.

Además con lo anterior recuperarás las siguientes competencias genéricas:

- Expresar ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas o gráficas.
- Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.
- Proponer la manera de resolver un problema.
- Aportar puntos de vista con apertura hacia los de otras personas.

Desarrollo

Conversión de ángulos en grados a radianes y viceversa.

Como recordarás en los bloques anteriores aprendiste que las unidades para medir los ángulos en el sistema sexagesimal eran los grados. Sin embargo, existe otra unidad mucho más práctica que permite medir los ángulos, el radián, la cual se basa en la longitud de arco obtenida en una circunferencia de radio 1 o la unidad. En consecuencia podemos definir un ***radián*** como el valor del ángulo cuya medida de su arco es igual al radio de una circunferencia cuyo radio vale 1.

Consideremos una circunferencia cuyo radio es igual a 1 cm. Ahora recordemos la fórmula para encontrar el valor de la longitud de la circunferencia.

$C = 2\pi r$

Si $r = 1$ sustituyendo en la fórmula:

$C = 2\pi\,(1)$

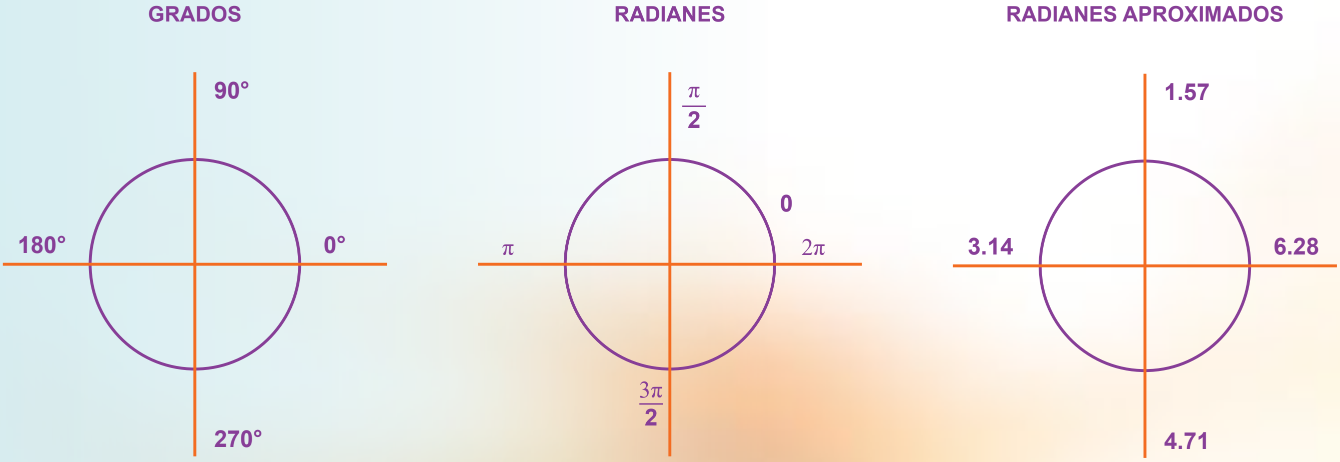
$C = 2\pi \text{ radianes}$

Como una circunferencia completa vale 360°.
Despejando a π:

$$\pi \text{ radianes} = \frac{360°}{2}$$

$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

Por lo tanto un ángulo de 360° equivale a 2π radianes; un ángulo de 180° equivale a π radianes (recordemos que el número de π = 3.14159265359...). Las equivalencias entre los cinco principales ángulos se muestran en las siguientes tres figuras:



Para convertir de grados a radianes o viceversa, partimos de que 180° equivalen a π radianes; luego planteamos una regla de tres y resolvemos.

Examina atentamente los siguientes ejemplos de conversión de ángulos a radianes y viceversa:

Convertir de grados a radianes.

1. Convertir 38° a radianes.

$180° \to \pi \textit{ radianes}$

$38° \to x$

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{38°}{x}$$

$$(x)(180°) = (38°)(\pi)$$

$$x = \frac{38°\pi}{180°}$$

$$x = \frac{19\,\pi}{90}$$

$x = 0.6632 \textit{ radianes}$

Procedimientos:

Paso 1. Primero aplicamos la regla de tres.

Paso 2. Se despeja "x" dde la ecuación.

Paso 3. Simplificamos y obtenemos el equivalente en decimal con la calculadora.

2. Convertir 52° a radianes.

$180° \to \pi \textit{ radianes}$

$52° \to x$

$$\frac{180°}{52°} = \frac{\pi \textit{ radianes}}{x}$$

$$x = \frac{(52°)(\pi \textit{ radianes})}{180°}$$

$$x = \frac{26\,(\pi \textit{ rad})}{90°}$$

$$x = \frac{13\,\pi \textit{ rad}}{45}$$

Saber más...

Para cambiar	Multiplicar Por:	Ejemplos:
Grados a radianes	$\frac{\pi}{180°}$	$90° = \frac{90°(\pi)}{180°} = \frac{\pi}{2}$ $270° = \frac{270°(\pi)}{180°} = \frac{3\pi}{2}$
Radianes a grados	$\frac{180°}{\pi}$	$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi(180°)}{3(\pi)} = \frac{180°}{3} = 60°$

3. Convertir 39° 15´45" a radianes.

39° 15´ 45” = 39.2625°

$180° \rightarrow \pi \; radianes$

$39.2625° \rightarrow x$

$$\frac{180°}{39.2625°} = \frac{\pi \; radianes}{x}$$

$$x = \frac{(39.2625°)(\pi \; radianes)}{180°}$$

$x = 0.21807 \; \pi \; radianes$

Procedimientos:

Paso 1. Se realiza la conversión a grados con decimales. (Apóyate en tu calculadora científica).

Paso 2. Formamos la regla de tres.

Paso 3. Despeja la incógnita, que es el resultado buscado.

Convertir en radianes a grados

1. Convertir 2.4 radianes a grados.

$\pi \; radianes \rightarrow 180°$

$2.4 \; radianes \rightarrow x$

$$\frac{\pi}{2.4 \; rad} = \frac{180°}{x}$$

$$(x)(\pi) = (180°)(2.4 \; radianes)$$

$$x = \frac{(180°)(2.4 \; rad)}{\pi}$$

$x = 137.5095°$

Procedimientos:

Paso 1. Primero aplicamos la regla de tres.

Paso 2. Se despeja "x" de la ecuación.

Paso 3. Simplificamos y obtenemos el equivalente en decimal con la calculadora.

ACTIVIDAD 1
SD1-B4

En esta actividad realiza las conversiones de los siguientes valores de grados a radianes y viceversa.

1. Completa la tabla con los datos solicitados.

GRADOS	RADIANES
76°48´	
	$\frac{\pi}{18}$
25°	
	$\frac{\pi}{8}$
56°23´17 ´´	
	$\frac{\pi}{2}$
	$\frac{2\pi}{3}$
17°17´23´´	
	$\frac{3\pi}{5}$
	$\frac{3\pi}{10}$
122°33´54´´	
234°	
270°	

2. Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

a) Una bicicleta tiene 12 rayos, ¿Cuál es la equivalencia de su ángulo central en radianes?.

b) Imagina que divides una circunferencia en 24 partes iguales. ¿Qué medida angular le corresponde a cada parte? ¿Qué medida circular (en radianes) le corresponde a cada parte?

Instrumento de evaluación

Lista de cotejo

Nombre del alumno: ____ grupo/turno: ____________

Tema evaluado: ____

Asignatura: ____________________________________ parcial: __________________ bloque: ___________

Fecha de entrega: ____ puntaje alcanzado: ______________

Instrucciones: marca con una palomita en cada espacio donde se presente el atributo	
	1. Cuenta con la lista de cotejo impresa y llena con los datos de identificación del elaborador.
	2. responde correctamente la tabla.
	3. Presenta el ejercicio de manera limpia, clara y legible.
	4. Responde correctamente a los problemas.
	Total de aciertos.

Razones trigonométricas

En la primera Unidad tuviste oportunidad de familiarizarte con los triángulos y sus características. Partiendo de tales conocimientos podrás abordar con mayor facilidad los temas que se presentarán en esta Unidad que se intitula "Las Razones Trigonométricas". En ella aprenderás a resolver con el auxilio de la trigonometría, problemas que se presentan en una diversidad de aplicaciones de la vida cotidiana o del trabajo especializado, como es el caso de los ingenieros de la construcción al diseñar estructuras, los topógrafos cuando efectúan el trazo de carreteras en terrenos difíciles de transitar y para calcular distancias entre objetos de manera indirecta, es decir, sin necesidad de medir en el lugar con algún instrumento sino a través de un cálculo matemático. También es útil para el diseño de estructuras que van desde un puente hasta el diseño de automóviles.

Las razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad).

Existen seis razones trigonométricas básicas que son:

Sen = seno

Cos = coseno

Tan = tangente

Cot = cotangente

Sec = secante

Csc = cosecante

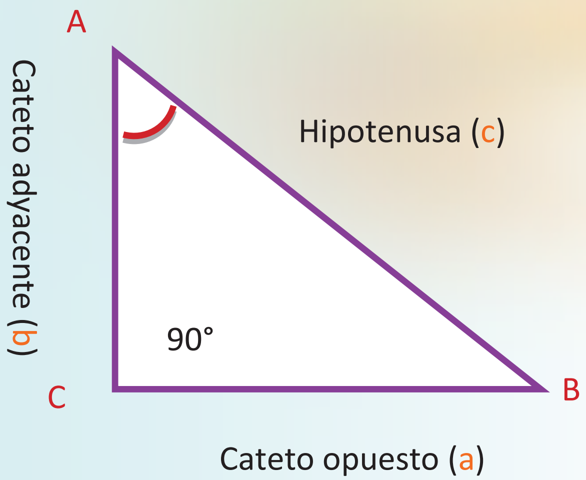
Saber más...

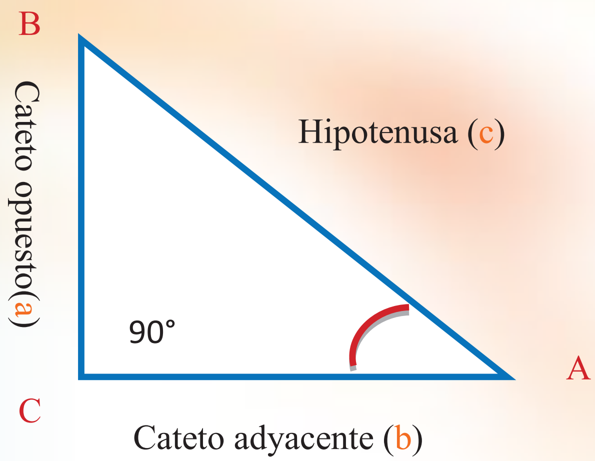
La ***trigonometría*** es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Etimológicamente significa... "***medida de triángulos***".

Donde cotangente, secante y cosecante son *razones recíprocas.*

Para definir las razones trigonométricas del ángulo: del vértice *A*, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en el sucesivo será:

- ***La hipotenusa (c)*** es el lado opuesto al ángulo recto o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- ***El cateto opuesto (a)*** es el lado opuesto al ángulo.
- ***El cateto adyacente (b)*** es el lado contiguo al ángulo.





Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano cartesiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y $\pi/2$ radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las razones trigonométricas para ángulos dentro de ese rango:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

$$sen\ \text{a} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$cos\ \text{a} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$tan\ \text{a} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$cot\ \text{a} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$sec\ \text{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$csc\ \text{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

Saber más...

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna.

Como puedes observar las razones cotangente, secante y cosecante son reciprocas a seno, coseno y tangente respectivamente. Veamos el siguiente cuadro:

Razón trigonométrica	Definición	Razón recíproca	Definición
Seno	$sen\ \alpha = \frac{c.o}{hip.}$	***cosecante***	$csc\ \alpha = \frac{hip.}{c.o.}$
coseno	$cos\ \alpha = \frac{c.a}{hip.}$	***secante***	$sec\ \alpha = \frac{hip.}{c.a}$
tangente	$tan\ \alpha = \frac{c.o}{c.a}$	***cotangente***	$cot\ \alpha = \frac{c.o}{c.a}$

Razones trigonométricas recíprocas:

$$(Sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = 1$$

$$(cos \propto)(sec \propto) = 1$$

$$(tan \propto)(cot \propto) = 1$$

Saber más...

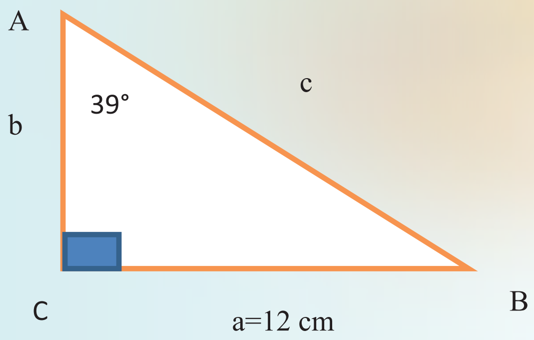
En Matemática se dice que dos números son ***recíprocos*** si el resultado de multiplicarlos es la unidad. En las fracciones, para hallar su recíproco se invierten en la segunda fracción el numerador y el denominador, y entonces, al simplificarlos, obtendremos la unidad. En Trigonometría, siendo las razones básicas, seno, coseno y tangente, sus inversos multiplicativos, que son la cotangente, la secante y la cosecante, respectivamente, reciben el nombre de ***razones recíprocas.***

¿Cómo resolver triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas?

Saber más...

Thomas Frick fue el que introdujo el uso de las palabras ***tangente y secante***. Tangente viene del latín *tangenes*, que toca. En general se usa en contextos matemáticos, pero también socialmente: salirse por la tangente equivale a valerse de una mentira o evasiva para escaparse hábilmente de un apuro.

Ejemplo: Encontrar el valor de las incógnitas del siguiente triangulo rectángulo.



DATOS:
$< A = 30°$
a = 12 cm
Calcular:
$< B =$ ________
b = __________
c = __________

Procedimientos:

Para calcular el cateto adyacente (b), utilizaremos la fórmula:

$$\tan\alpha = \frac{c.o}{c.a}$$

$$\tan 39° = \frac{12\ cm}{c.a}$$

$$(c.a)\ (\tan 39°) = 12\ cm$$

$$c.a = \frac{12\ cm}{\tan 39°}$$

$$c.a = \frac{12\ cm}{0.8097}$$

$$c.a = 14.8203\ cm$$

Es decir: $b = 14.8203\ cm$

Paso 1. Según la medida del ángulo que se te proporciona (<A = 30°)puedes ver que el cateto opuesto mide 12 cm.

Paso 2. Selecciona la razón trigonométrica que contenga el cateto opuesto y lo que quieres calcular primero de las incógnitas que tienes.

Por ejemplo seno y tangente contienen cateto opuesto.

En este ejemplo primero calcularemos el cateto adyacente.

Paso 3. Se sustituyen los valores proporcionados y se despeja la incógnita.

Paso 4. Calcula tan39° con tu calculadora científica.

Para calcular la hipotenusa (c), utilizaremos la función seno:

$$sen\ \alpha = \frac{c.o}{hip.}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$sen\ 39° = \frac{12\ cm}{hip.}$$

$$hip. = \frac{12\ cm}{sen\ 39°}$$

$$hip. = 19.0688\ cm$$

Es decir la hipotenusa mide:
$c = 19.0688\ cm$

Para calcular el ángulo faltante:

Como: la suma de los tres ángulos es de 180°.

$$< B = 180° - 90° - 30°$$

$$< B = 51°$$

ACTIVIDAD 2
SD1-B4

1. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas utilizando tu calculadora.

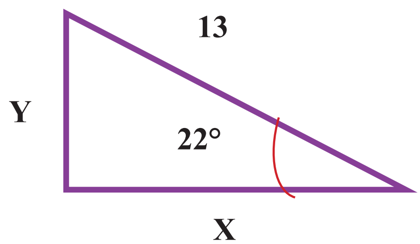
   a) $sen\ 25° =$

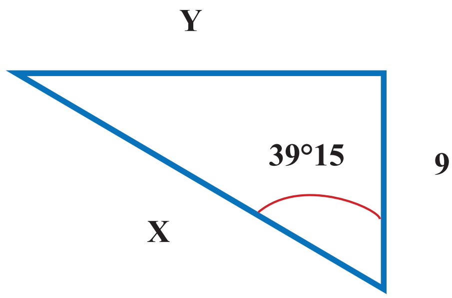
   b) $tan\ 35°34' =$

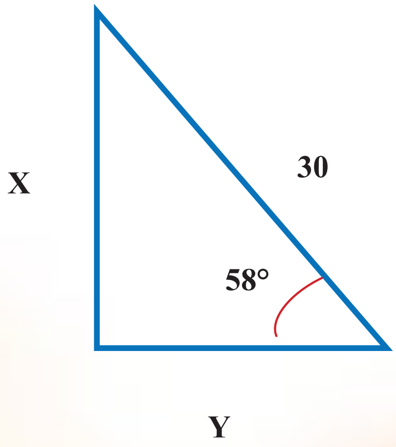
   c) $cos\ 125° =$

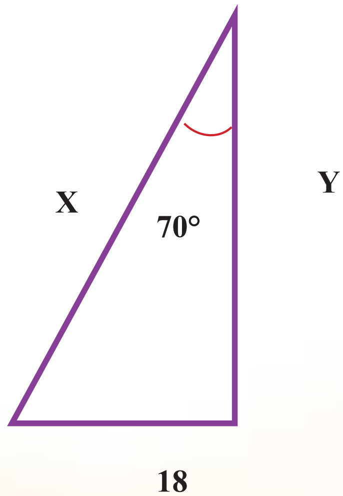
   d) $sen\ 135°34'5'' =$

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Es decir, calcula el valor de las incógnitas y el valor del ángulo faltante, utilizando teorema de Pitágoras y/o razones trigonométricas.









3. Calcula las siguientes razones trigonométricas con sus recíprocas.

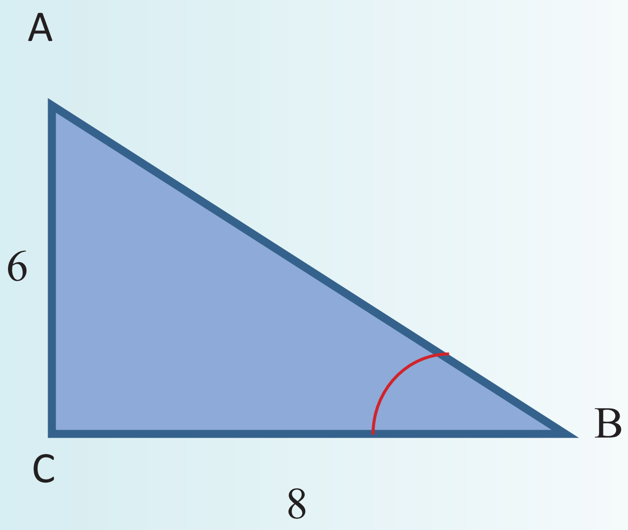
a) $csc\ 30° =$

b) $sec\ 30° =$

c) $cot\ 30° =$

d) $scs\ 60° =$

4. Completa los valores de las razones trigonométricas para el ángulo A del triángulo ABC. Sigue los ejemplos.



Triángulo ABC	
Ángulo A	**Ángulo B**
$Sen\ A = \frac{8}{}$	$Sen\ B = \frac{6}{}$
$Cos\ A = \frac{}{}$	$Cos\ B = \frac{}{}$
$Tan\ A = \frac{}{}$	$Tan\ B = \frac{}{}$
$CotA = \frac{}{}$	$CotB = \frac{}{}$
$SecA = \frac{}{}$	$SecB = \frac{}{}$
$CscA = \frac{}{}$	$CscB = \frac{}{}$

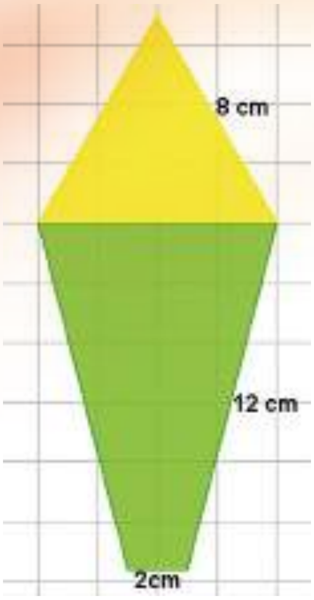
ACTIVIDAD 3
SD1-B4

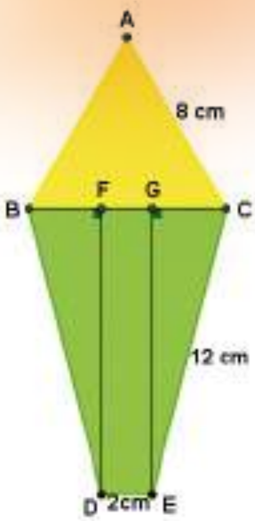
La práctica hace al maestro

Retomando el ejercicio de polígonos irregulares que viste en el bloque 3, contesta lo que se te pide:

1. El problema presenta un polígono irregular compuesto por un triángulo equilátero de lado 8 cm y un trapecio isósceles, cuya base menor mide 2 cm y el lado 12 cm. Calcula las medidas de los ángulos DBF, GCE, FDB, CEG, los cuales te faltaron por determinar sus valores en el bloque 3, resuélvelo utilizando las razones trigonométricas correspondientes.

Se divide la figura anterior de la siguiente manera:

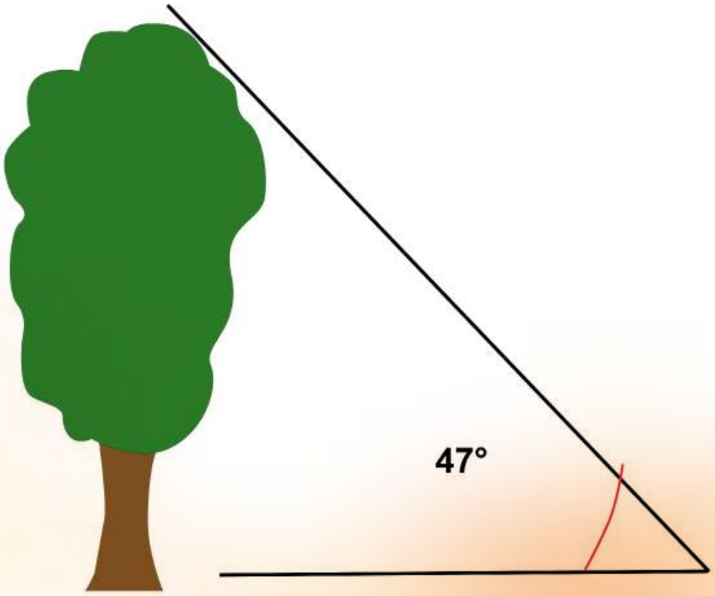




Aplicación de las razones trigonométricas a problemas aplicados a la vida diaria, que involucran un triángulo rectángulo.

A continuación veremos algunas aplicaciones de las razones trigonométricas en la resolución de problemas, aquí utilizarás los conceptos que has aprendido hasta el momento.

Ejemplo. Un árbol proyecta una sombra de 3.2 metros a una hora determinada, con un ángulo de 47°. Determinar la altura del árbol.



Procedimientos:

Datos:

c.a= 3.2 mt.

$\alpha = 47°$

Calcular:

c.o = ______

$$\tan \alpha = \frac{c.o}{c.a}$$

$$\tan 47° = \frac{c.o}{3.2\ mt}$$

$$(\tan 47°)(3.2\ mt) = c.o$$

$$c.o = 3.43mt$$

Por lo tanto la altura del árbol es de 3.43 Mts.

¿Sabías qué?

¿Un **goniómetro** también es conocido como **inclinómetro**? es una herramienta que nos permite medir la elevación de cualquier objeto de manera sencilla mediante una serie de cálculos.

ACTIVIDAD 4
SD1-B4

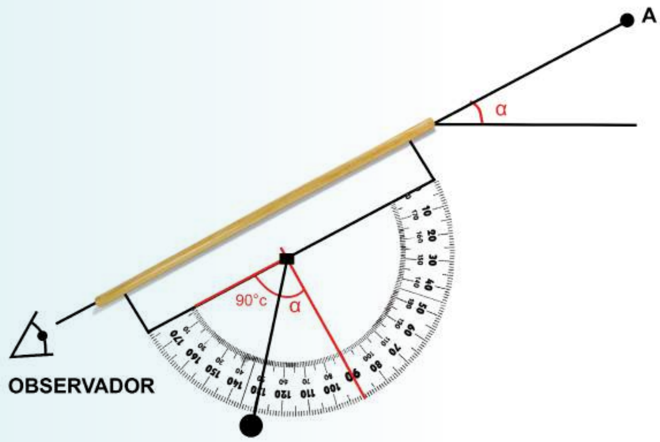
La práctica hace al maestro

Reúnete en equipo de cinco integrantes, para elaborar un goniómetro y con ello calcular alturas de árboles, edificios, asta de la bandera etc. reúne tu material para elaborarlo como se te muestra a continuación.

Material para elaborar el goniómetro:

- Cinta adhesiva.
- Transportador.
- 1 popote.
- Hilo.
- Una tuerca.

Nos quedaría algo así:



Prepara el goniómetro y luego sigue el siguiente método:

Paso 1. Elige el objeto a medir su altura.
Paso2. Colócate a una cierta distancia del objeto y a través del popote mira la punta del objeto.

Lee el ángulo de elevación “x”.

Paso 3. Mide la distancia “l” a la que te situaste del objeto.

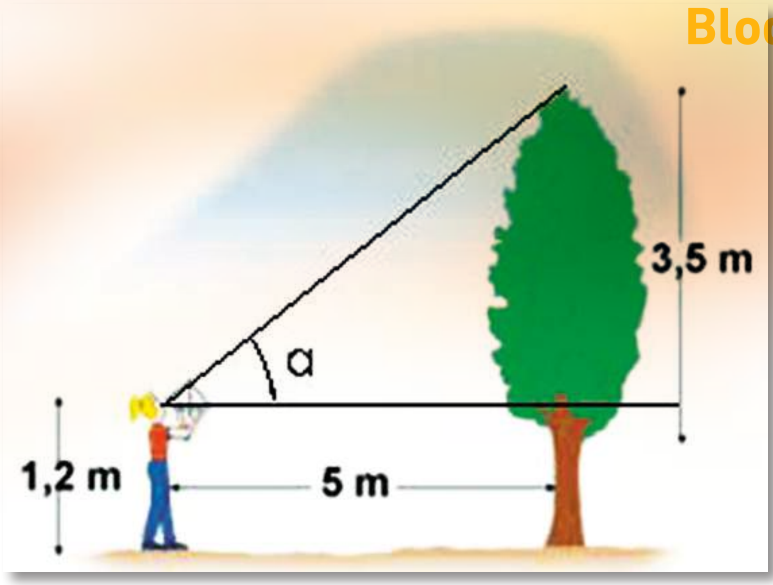
Paso 4. Calcula la altura “h” del objeto utilizando los daros anteriores y la siguiente formula.

$$\tan x = \frac{l}{h} \longrightarrow h = \frac{l}{\tan x}$$

Paso 5. La altura total “h” del objeto se obtiene con la formula

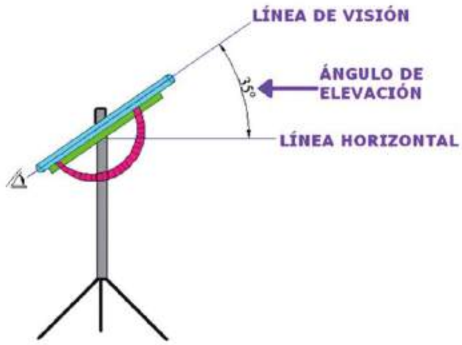
$h = \frac{l}{\tan x} + d$, donde “d” es la distancia del suelo a tus ojos.

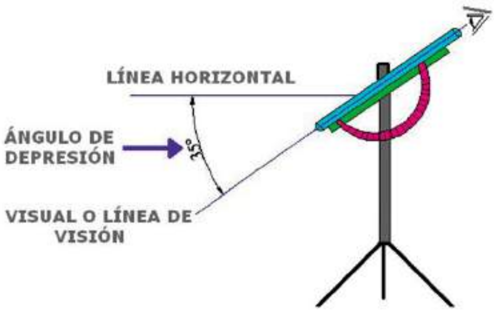
Paso 6. Ordena los datos de las mediciones en una tabla, por lo menos 5 objetos por estudiante y preséntalas a tu profesor para que sean revisadas.



Ángulo de elevación y ángulo de depresión:

Angulo de elevación: es el que se forma entre la línea visual de un observador y un objeto cuando este se encuentra arriba de la horizontal. Si esta debajo de la horizontal de llama **ángulo de depresión**. Ver las figuras.

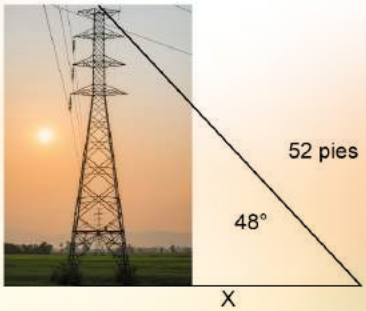




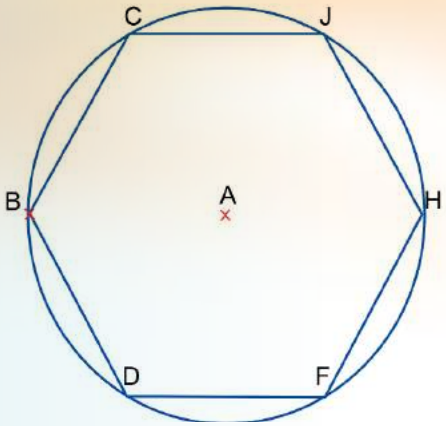
ACTIVIDAD 5
SD1-B4

1. Resuelve los siguientes problemas que involucran triángulos rectángulos. Utiliza las razones trigonométricas que sean necesarias.

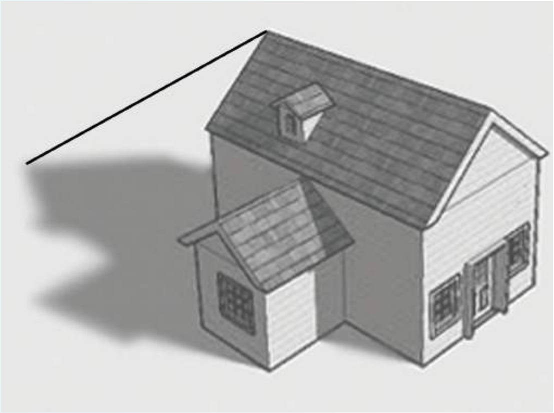
   a) Un cable guía de 52 pies de longitud va desde el nivel del piso hasta lo alto de una antena. El cable forma un ángulo de 48° con la antena. ¿A qué distancia de la base de la antena está anclado el cable?



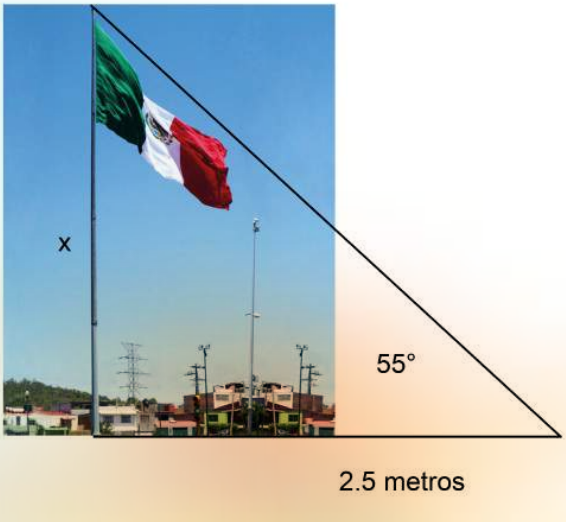
b) ¿Cuál es la longitud de la apotema y cuál es el área de un hexágono inscrito en una circunferencia con radio de 10cm?



c) Una casa proyecta una sombra de 34.43 metros, cuando el sol tiene un ángulo de elevación de 22°. Calcula la altura de la casa.



d) Para determinar la altura de un asta bandera, nos hemos alejado una distancia de 2.5 metros con relación a su base. Si el ángulo que se forma es de 55°, ¿Cuál es la altura del asta bandera?



Instrumento de evaluación

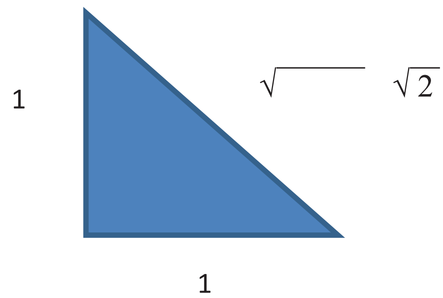
Lista de cotejo

Nombre del alumno: ______________________________ grupo/turno: __________
Tema evaluado: ____
Asignatura: ________________________ parcial: ____________ bloque: ________
Fecha de entrega: ______________________________ puntaje alcanzado: __________

Instrucciones: marca con una palomita en cada espacio donde se presente el atributo	
	1. Cuenta con la lista de cotejo impresa y llena con los datos de identificación del elaborador.
	2. Presenta el ejercicio de manera limpia, clara y legible.
	3. Resuelve correctamente los ejercicios.
	Total de aciertos.

Cálculo de valores de las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°.

Ahora analizaremos el valor de las razones trigonométricas para ángulos 45°, para esto necesitamos un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan una longitud de 1cm y entre ellos haya un ángulo de 90°, como el que se muestra en la figura. La hipotenusa se obtiene una vez utilizando el teorema de Pitágoras, el cual lo viste en el bloque 2.



Para cualquiera de los dos ángulos de 45° el cateto opuesto y el adyacente valen 1 y la hipotenusa $\sqrt{2}$.

En consecuencia:

$$Sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1$$

O bien:

$$Sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad tan\ 45° = 1$$

Saber más...

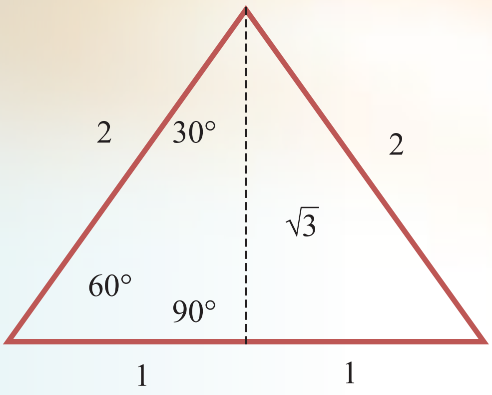
Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{2}$ y resulta:

$$Sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$sen\ 45° = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Es decir, se puede representar que: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y que $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, y así sucesivamente.

Para ángulos de **30° y 60°** utilizaremos un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades cada uno, se ha trazado la altura y en consecuencia se han obtenido dos triángulos rectángulos con las dimensiones que se muestran en la figura siguiente:



La medida de la altura del triángulo se calculó aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Sustituyendo en la expresión los valores c =2, a = 1 y despejando, se obtiene el valor de b.

$$1^2 + b^2 = 2^2$$

$$b^2 = 4 - 1$$

$$b = \sqrt{3}$$

Para obtener los valores de las razones trigonométricas de 60° se tomará en cuenta que:

$$cateto\ opuesto = \sqrt{3}$$

$$cateto\ adyacente = 1$$

$$hipotenusa = 2$$

Por lo tanto:

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}, \qquad tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Para obtener los valores de las razones trigonométricas de 30° se tomará en cuenta que:

$$cateto\ opuesto = 1$$

$$cateto\ adyacente = \sqrt{3}$$

$$hipotenusa = 2$$

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}, \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad tan30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ordenando los valores de las razones trigonométricas para ángulos de mayor uso nos queda:

Razón	0°	30°	45°	60°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ACTIVIDAD 6
SD1-B4

La práctica hace al maestro

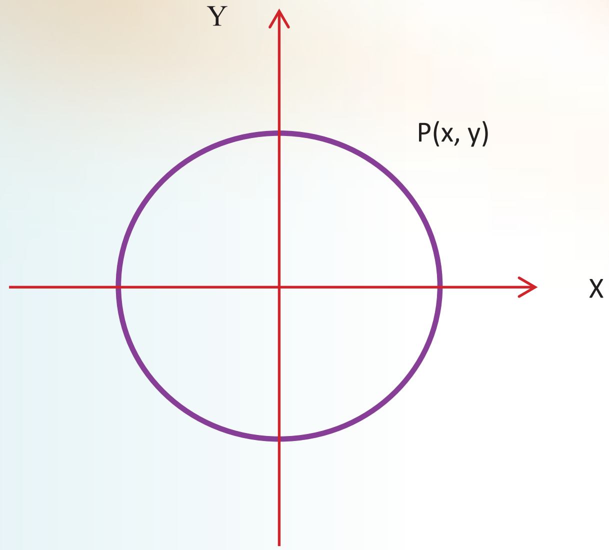
1. Completa la tabla usando las propiedades de las razones reciprocas.

ángulo	sen α	csc α	cos α	sec α	tan α	cot α
0°						
30°						
45°						
60°						

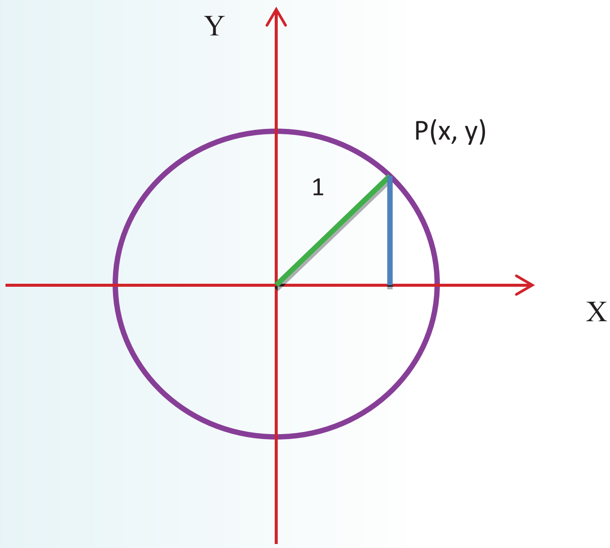
Circulo unitario

Circulo unitario es el que tiene un radio cuya longitud es igual a 1.

Primero graficamos una circunferencia en el plano cartesiano y localizamos un punto P(x, y) en ella.



Tracemos las proyecciones del radio en ambos ejes para formar un triángulo de la siguiente forma:



Observa cómo se formó un triángulo rectángulo. Así mismo podemos localizar el cateto opuesto en la proyección del eje "y" y el cateto adyacente en la proyección del eje "x". Además, como se trata de círculo unitario, la hipotenusa vale 1, considerando todo en relación al ángulo A. una vez definido todo esto, obtengamos el seno y coseno del ángulo A.

$$sen\ A = \frac{C.}{HIP} \qquad cos\ A = \frac{C.A}{HIP}$$

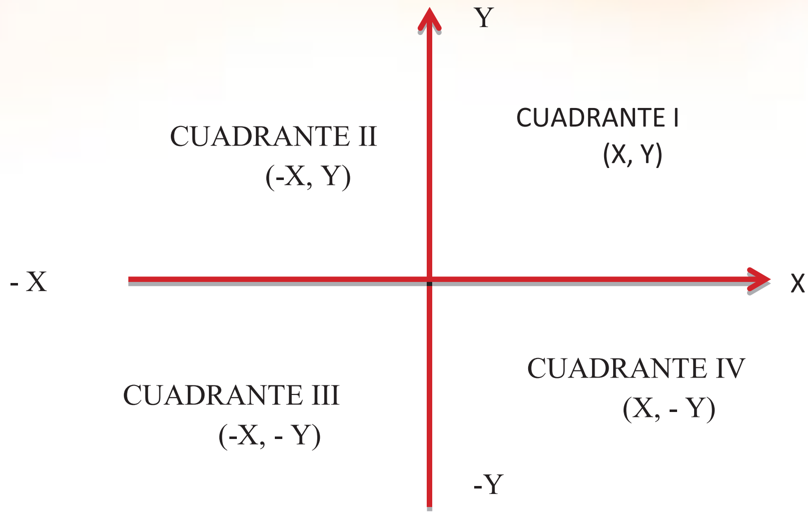
$$sen\ A = \frac{y}{1} \qquad cos\ A = \frac{x}{1}$$

$$sen\ A = y \qquad cos\ A = x$$

Aplicando lo anterior, podemos decir que: para obtener las coordenadas de un punto situado en la circunferencia unitaria, se utiliza la siguiente relación:

$P\,(x,y) = (PcosA,\ sen\ A)$

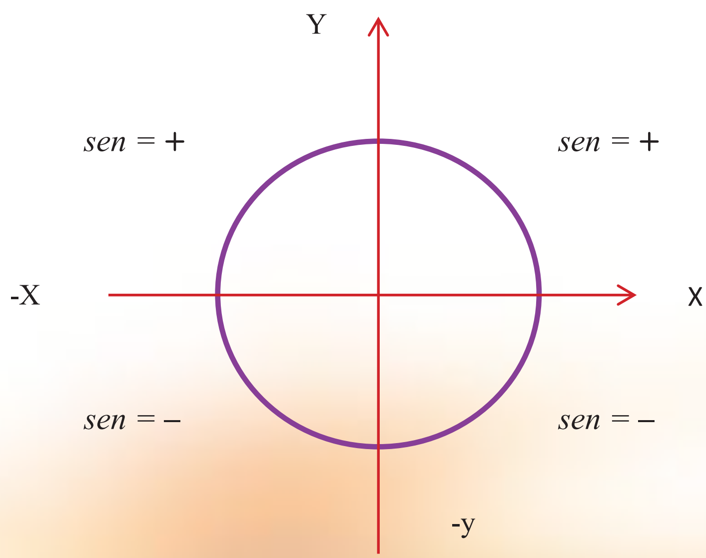
En el plano cartesiano, las regiones que están delimitadas por los ejes de coordenadas se llaman cuadrantes, ver la siguiente figura.



Signos de las razones trigonométricas en el círculo unitario.

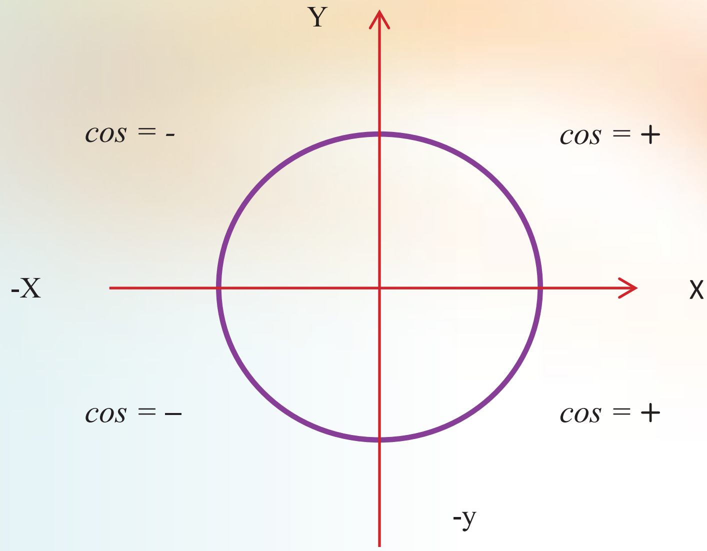
Utilicemos los conceptos anteriores para definir los signos de las razones trigonométricas, en cada uno de los cuadrantes, para esto es necesario considerar como cambian de signo los valores de las coordenadas “x” y las coordenadas de “y” en cada uno de los cuadrantes.
No olvides considerar que coseno es para “x” y seno es para “y”.

Primero analicemos la razón seno.



En el primer y segundo cuadrante la razón seno es positiva, y el tercero y cuarto cuadrante es negativo, quedando así establecidos los signos de la razón seno.

Ahora veremos cómo se comporta el coseno.



En el primer y cuarto cuadrante coseno es positivo y en el segundo y tercer cuadrante es negativo.

Veamos el comportamiento de tangente

Para esto utilizaremos el cociente de:

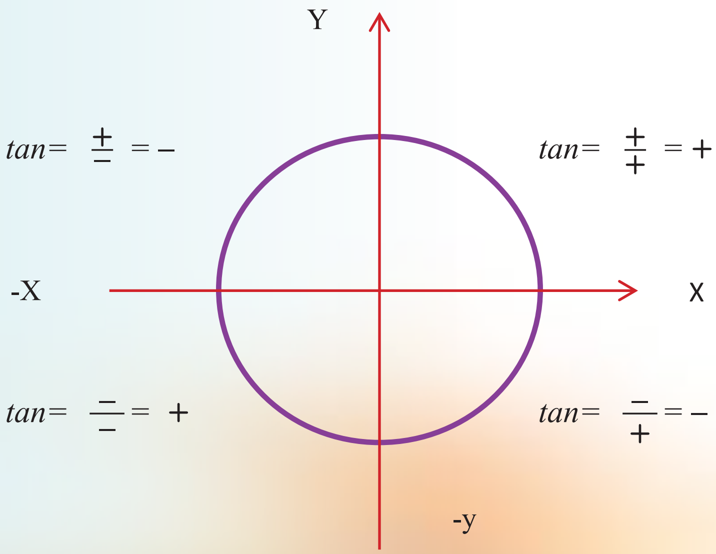
$$\tan A = \frac{c.o}{c.a}$$

Es decir:

$$\tan A = \frac{sen\ A}{cos\ A}$$

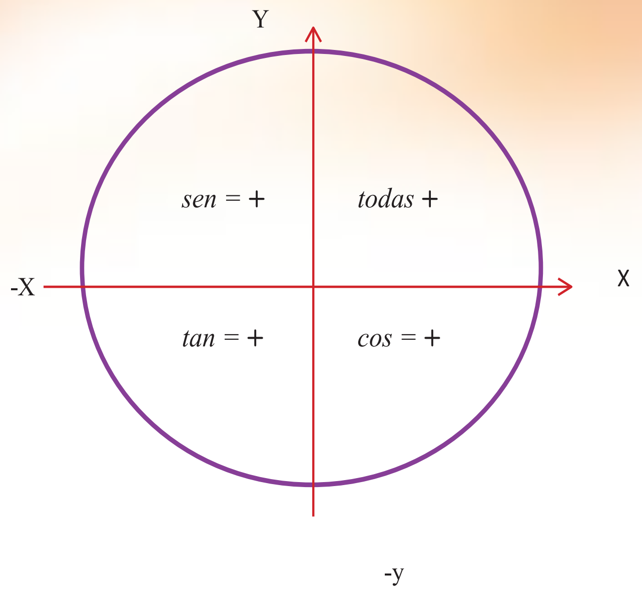
Queda:

$\tan A = \frac{y}{x}$



En el primer y tercer cuadrante la tangente es positiva y por lo tanto en los otros dos cuadrantes es negativa.

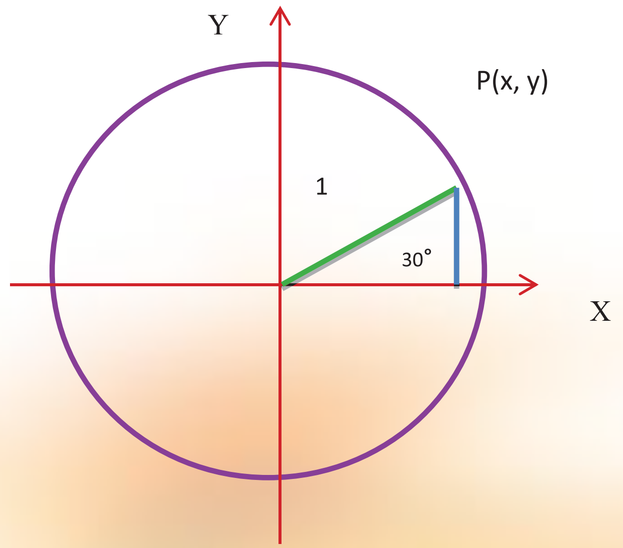
Podemos representar los signos de las razones trigonométricas en los siguientes cuadrantes. (Ver la siguiente figura).



Resumiendo, los signos de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en los cuatro cuadrantes quedan:

Razón trigonométrica	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
sen A	+	+	-	-
cos A	+	-	-	+
tan A	+	-	+	-

Ejemplo1. Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene un valor de 30°.



Aplicando: $sen\ A = y$ y $cos\ A = x$

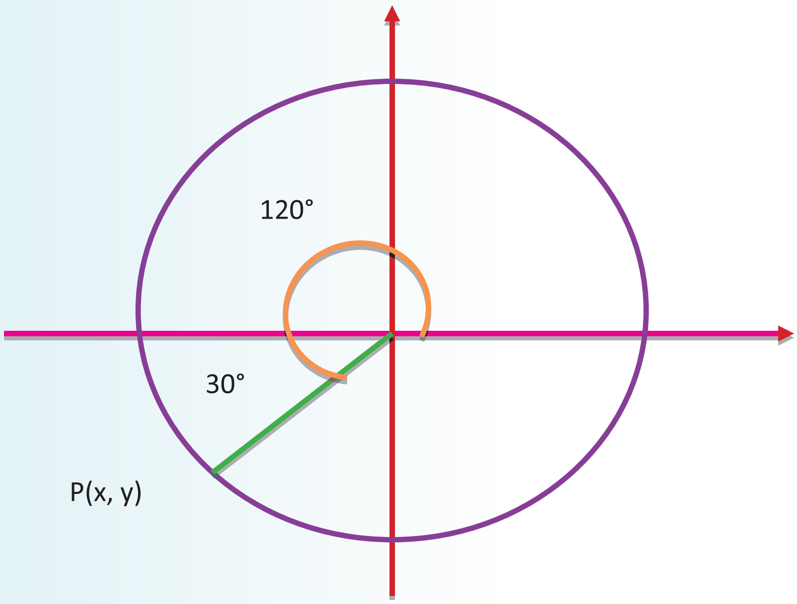
sustituyendo en: $P\,(x, y) = P\,(cosA, sen\ A)$

Obtenemos: $P\,(cos30°, sen\ 30°)$ y sabemos que: $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $sen\ 30° = \frac{1}{2}$

Por lo tanto las coordenadas quedan así:

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ejemplo 2. Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene un valor de 210°.



Las coordenadas están definidas como: $P\,(x, y) = P\,(cosA, sen\ A)$

$P\,(cos\ 210°, sen210°)$

Para saber cuál es el ángulo más pequeño que se forma con el eje "x" es necesario restar 180° a 210°.

$210° - 180° = 30°$

Y como su punto terminal se encuentra en el tercer cuadrante, el seno y coseno son negativos, por lo que las coordenadas quedan:

$P\,(cos\ 210°, sen210°)$ Haciendo el cambio: $P\,(-\,cos\ 30°, -\,sen30°)$

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Logros

Cierre

Guarda esta actividad en tu Portafolio de evidencias.

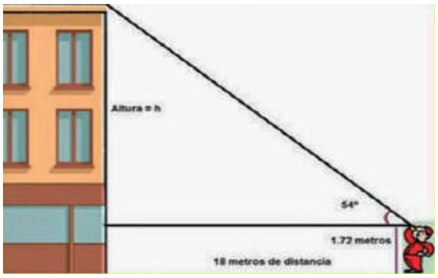
ACTIVIDAD 7

SD1-B4

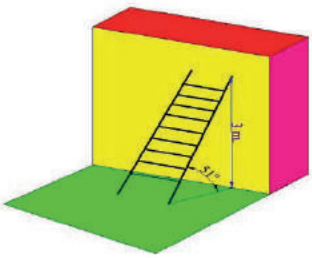
1. Resuelve los siguientes problemas de aplicación a la vida diaria, que involucran un triángulo rectángulo.

   a) Una escalera esta recargada sobre una barda de 2.3 metros de alto con una inclinación de 57°. ¿Qué longitud tiene la escalera?

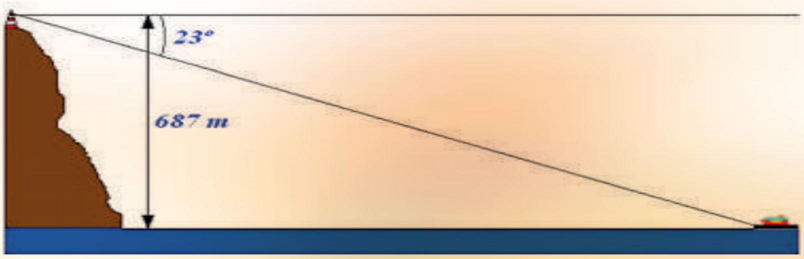
   b) Una persona observa en un ángulo de 54°, lo alto que es un edificio; si la persona mide 1.72 metros y está ubicada a 18 metros de la base del edificio. ¿Cuál es la altura en metros del edificio?



   c) El extremo superior de una escalera está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 3 metros. Si forma un ángulo de 51° con el suelo. ¿Cuál es el largo de la escalera?

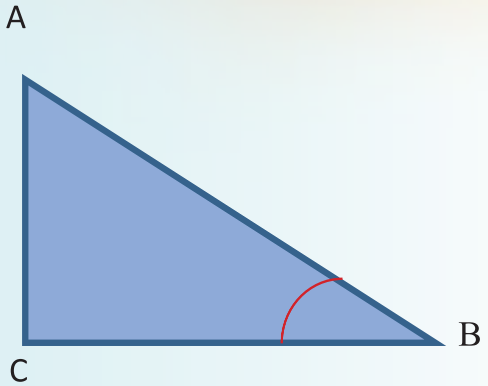


   d) Un observador se encuentra en un faro al pie de un acantilado. Está a 687 metros sobre el nivel del mar, desde este punto se observa un barco con un ángulo de depresión de 23°. Se desea saber a qué distancia de la base del acantilado se encuentra el barco.



e) Una puerta mide 210 cm de altura por 80 cm de ancho. ¿Cuál es el ancho mayor que puede tener un tablero para que quepa por esta puerta?

f) Completa los valores de las razones trigonométricas para el ángulo A del triángulo ABC. Sigue los ejemplos.



Triángulo **ABC**	
ángulo A	**ángulo B**
$Sen\ A = —$	$Sen\ B = —$
$Cos\ A = —$	$Cos\ B = —$
$Tan\ A = —$	$Tan\ B = —$
$Cot\ A = —$	$Cot\ B = —$
$Sec\ A = —$	$Sec\ B = —$
$Csc\ A = —$	$Csc\ B = —$

g) Si en un triángulo $sen\ \theta = \frac{5}{9}$, encuentra coseno y tangente. Calcula el valor de los ángulos agudos.

h) En un triángulo se sabe que $\tan\ \theta = \frac{5}{8}$, calcula seno y coseno. Calcula el valor de los ángulos agudos.

i) Obtener los siguientes valores de las funciones recíprocas.

a) $\sec 43° =$
b) $\csc 53° =$
c) $\cot 78° =$
d) $\sec 62° =$

j) Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene un valor de 60°.

k) Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene un valor de 225°.

l) Convertir 7.8 radianes a grados.

m) Convertir 325° grados a radianes.

n) Convertir 76°51´´2 grados a radianes.

Instrumento de evaluación

Lista de cotejo

Nombre del alumno: ______________________________ grupo/turno: __________

Tema evaluado: ____

Asignatura: ______________________ parcial: __________ bloque: ________

Fecha de entrega: ___________________________ puntaje alcanzado: __________

Instrucciones: marca con una palomita en cada espacio donde se presente el atributo	
	1. Cuenta con la lista de cotejo impresa y llena con los datos de identificación del elaborador.
	2. Presenta el ejercicio de manera limpia, clara y legible.
	3. Resuelve correctamente los ejercicios. Otorgar un punto por cada una.
	Total de desempeños.

Inicio

Secuencia didáctica 2
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

De entrada

Al término de esta secuencia identificarás las identidades trigonométricas Pitagóricas e identidades trigonométricas reciprocas, con la finalidad de que puedas plantear una misma expresión en diferentes formas haciendo verificaciones de estas identidades trigonométricas, utilizando técnicas de sustitución para simplificar las expresiones algebraicas presentadas, apoyándote en la factorización, denominadores comunes, etc.

Además con lo anterior recuperarás las siguientes competencias genéricas:

- Expresarás ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas o gráficas.
- Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.
- Proponer la manera de resolver un problema.
- Aportar puntos de vista con apertura hacia los de otras personas.

ACTIVIDAD 1
SD2-B4

1. Reúnanse en parejas. Apliquen el teorema de Pitágoras y utilicen el concepto de las coordenadas en el círculo unitario para demostrar la siguiente identidad:

$$sen^2 A + cos^2 A = 1$$

¿Qué estrategias utilizarían para lograr lo anterior?

____
____
____

¿Pueden indicar con claridad los catetos y la hipotenusa?

____
____
____

¿Podrás encontrar alguna identidad similar pero que defina la relación que existe entre la *tangente* y la *secante*? Y ¿para la *cotangente* y la *cosecante*?

____
____
____

Comenten sus logros y estrategias con el grupo. Una vez que hayan encontrado y verificado las relaciones entre todos los equipos, anótenlas en una hoja de papel bond y péguenlas en el salón.

Instrumento de evaluación

Lista de cotejo

Nombre del alumno: ______________________________ grupo/turno: __________
Tema evaluado: ____
Asignatura: ______________________ parcial: __________ bloque: ________
Fecha de entrega: ______________________________ puntaje alcanzado: __________

Instrucciones: marca con una palomita en cada espacio donde se presente el atributo	
	1. Cuenta con la lista de cotejo impresa y llena con los datos de identificación del elaborador.
	2. Responde correctamente la primera pregunta.
	3. Responde correctamente la segunda pregunta.
	4. Responde correctamente la tercer pregunta.
	Total de desempeños.

Desarrollo

Identidades trigonométricas

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que contienen razones trigonométricas, y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidos (y las operaciones aritméticas involucradas).

Estas identidades son siempre útiles, cuando necesitamos simplificar expresiones que tienen incluidas razones trigonométricas, cualesquiera que sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas estas razones. Las identidades trigonométricas nos permiten plantear una misma expresión de diferentes formas. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos la factorización, denominadores comunes, etc. Pero para simplificar expresiones trigonométricas utilizaremos estas técnicas en conjunto con las identidades trigonométricas.

Antes de comenzar a ver las diferentes identidades trigonométricas, debemos conocer algunos términos que usaremos bastante en trigonometría, que son las tres razones más importantes dentro de esta. El **coseno** de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa:

$$cos \propto = \frac{c.a}{hip}$$

Otra función que utilizaremos en trigonometría es "seno". Definiremos **seno** como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo:

$$sen \propto = \frac{c.o}{hip}$$

Mientras tanto la palabra **tangente** en matemática puede que tenga dos significados distintos. En geometría se utiliza el término de recta tangente, pero a nosotros en trigonometría nos interesa otro término que es el de tangente de un ángulo, el cual es la relación entre los catetos de un triángulo rectángulo, lo mismo que decir que es el valor numérico que resulta de dividir la longitud del cateto opuesto entre la del cateto adyacente al ángulo.

$$tan \propto = \frac{c.o}{c.a}$$

Saber más...

Se define:

$sen^2 \propto = (sen \propto)^2$

Lo mismo se aplica a las demás razones trigonométricas.

Las siguientes identidades se cumplen para cualquier ángulo en el cual el denominador no sea cero. Éstas son **identidades recíprocas**:

Razón trigonométrica	Definición	Razón recíproca	Definición
Seno	$sen\ \alpha = \frac{c.o}{hip.}$	***cosecante***	$csc\ \alpha = \frac{hip.}{c.o.}$
coseno	$cos\ \alpha = \frac{c.a}{hip.}$	***secante***	$sec\ \alpha = \frac{hip.}{c.a}$
tangente	$tan\ \alpha = \frac{c.o}{c.a}$	***cotangente***	$cot\ \alpha = \frac{c.o}{c.a}$

Razones trigonométricas recíprocas:

$$(Sen\alpha)(csc\alpha) = 1$$

$$(cos \propto)(sec \propto) = 1$$

$$(tan \propto)(cot \propto) = 1$$

Es decir, despejando quedarían:

$$sen \propto = \frac{1}{csc \propto}$$

$$cos \propto = \frac{1}{sec \propto}$$

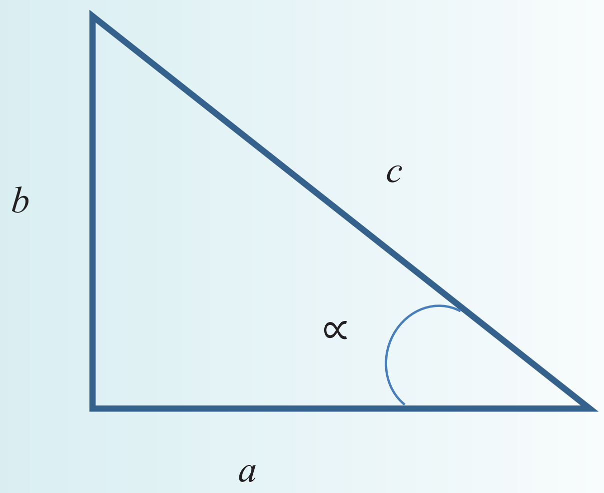
$$tan \propto = \frac{1}{cot \propto}$$

$$tan \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto}$$

$$cot \propto = \frac{cos \propto}{sen \propto}$$

A partir de las **relaciones pitagóricas** es posible encontrar otras identidades y demostrar algunas identidades trigonométricas. Mediante estas relaciones si conocemos las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo, podemos calcular la medida de la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto), y si conocemos la medida de la hipotenusa y la de un cateto podemos calcular la medida del otro cateto. Entonces diremos que el teorema de Pitágoras es un teorema que se aplica únicamente a triángulos rectángulos, y nos sirve para obtener un lado o la hipotenusa de un triángulo, si es que se conocen los otros dos. Las identidades de relaciones pitagóricas son las siguientes:

De acuerdo con el teorema de Pitágoras:



Usando el **teorema de Pitágoras:**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividiendo entre obtenemos:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

De donde: $$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

Y como: $sen \propto = \frac{b}{c}$ y $cos \propto = \frac{a}{c}$

$$(cos \propto)^2 + (sen \propto)^2 = 1$$

A esto se le **nombra identidad de relaciones pitagóricas.**

Por lo tanto las identidades de relaciones pitagóricas son:

$$cos^2 \propto + sen^2 \propto = 1$$

$$sec^2 \propto - tan^2 \propto = 1$$

$$csc^2 \propto - cot^2 \propto = 1$$

De las identidades pitagóricas se pueden obtener otras por medio de despeje.

$tan^2 \propto + 1 = sec^2 \propto$

$csc^2 \propto = 1 + cot^2 \propto$

$cos^2 \propto = 1 - sen^2 \propto$

Ejemplo 1. Verifica algebraicamente las siguientes identidades trigonométricas.

$$\frac{csc\Theta + sec\Theta}{1 + tan\Theta} = csc\Theta$$

Paso 1. Se empieza a sustituir las identidades trigonométricas en la parte izquierda de la identidad, de la siguiente manera:

$$\frac{csc\Theta + sec\Theta}{1 + tan\Theta} = \frac{\frac{1}{sen\Theta} + \frac{1}{cos\Theta}}{1 + \frac{sen\Theta}{cos\Theta}} =$$

Saber más...

$$csc\Theta = \frac{1}{sen\Theta}$$

$$sec\Theta = \frac{1}{cos\Theta}$$

$$tan\ \Theta = \frac{sen\Theta}{cos\Theta}$$

Paso 2. Realiza las sumas de fracciones:

$$\frac{\frac{1}{sen\Theta} + \frac{1}{cos\Theta}}{1 + \frac{sen\Theta}{cos\Theta}} = \frac{\frac{cos\Theta + sen\Theta}{(sen\Theta)\ (cos\Theta)}}{\frac{cos\Theta + sen\Theta}{cos\Theta}} =$$

Paso 3. Realiza las divisiones de fracciones, utilizando ley de la tortilla y elimina los factores iguales.

$$\frac{\frac{cos\Theta + sen\Theta}{(sen\Theta)\ (cos\Theta)}}{\frac{cos\Theta + sen\Theta}{cos\Theta}} = \frac{(cos\Theta)(cos\Theta + sen\Theta)}{[(sen\Theta)(cos\Theta)](cos\Theta + sen\Theta)} = \frac{1}{sen\Theta}$$

Paso 3. Concluye la verificación.

Y como $csc\Theta = \frac{1}{sen\Theta}$ entonces:

$$\frac{csc\Theta + sec\Theta}{1 + tan\Theta} = csc\Theta$$

Ejemplo 2. Verifica algebraicamente las siguientes identidades trigonométricas.

$$(1 + sec \propto)(1 - cos \propto) = (tan \propto)(sen \propto)$$

Paso 1. Se toma la parte izquierda de la identidad trigonométrica.

$$(1 + sec \propto)(1 - cos \propto) =$$

Paso2. Realiza la multiplicación.

$$(1 + sec \propto)(1 - cos \propto) = 1 - cos \propto + sec \propto - sec \propto cos \propto =$$

Paso 3. Sustituye $sec \propto = \frac{1}{cos \propto}$

$$1 - cos \propto + sec \propto - sec \propto cos \propto = 1 - cos \propto + \frac{1}{cos \propto} - \left(\frac{1}{cos \propto}\right)(cos \propto) =$$

Paso 4. Realiza operaciones aritméticas.

$$1 - cos \propto + \frac{1}{cos \propto} - \left(\frac{1}{cos \propto}\right)(cos \propto) = 1 - cos \propto + \frac{1}{cos \propto} - 1 = \frac{1}{cos \propto} - cos \propto =$$

$$\frac{1}{cos \propto} - cos \propto = \frac{1 - cos^2 \propto}{cos \propto} =$$

Paso 5. Sustituye $sec^2 \propto = 1 - cos^2 \propto$

$$\frac{1 - cos^2 \propto}{cos \propto} = \frac{sec^2 \propto}{cos \propto} = (sen \propto)\frac{(sen \propto)}{(cos \propto)} = (sen \propto)(tan \propto)$$

De esta manera resulta verificada la identidad trigonométrica.
Es decir la parte izquierda de la identidad es igual a la parte derecha.

ACTIVIDAD 2
SD2-B4

Realiza los siguientes ejercicios.

1. verifica las siguientes identidades trigonométricas utilizando el álgebra.

a) $\dfrac{\tan x}{tan^2 x - 1} = \dfrac{1}{\tan x - \cot x}$

b) $(1\ tanx)^3 = \left(\dfrac{\cot x - 1}{\cot x}\right)(sec^2 x - 2\ tanx)$

c) $\dfrac{sen\ x}{1+cos\ x} = \dfrac{1-cos\ x}{sen\ x}$

d) $sec^2 \propto + csc^2 \propto = (sec^2 \propto)\ (csc^2 \propto)$

e) $tan^2 x - sen^2 x = (tan^2 x)\ (sen^2 x)$

Cierre

Logros

ACTIVIDAD 3
SD2-B4

Guarda esta actividad en tu Portafolio de evidencias.

Realiza los siguientes ejercicios.

1. verifica las siguientes identidades trigonométricas utilizando el álgebra.

a) $\dfrac{sec\,x + 1}{sec\,x - 1} = \dfrac{1 + cos\,x}{1 - cos\,x}$

b) $(tan\,x + cotx)^2 = sec^2\,x + csc^2\,x$

c) $cot^2\,x - cos^2\,x = cos^2\,xcot^2\,x$

d) $cos^2\,x - sen^2\,x = 2\,cos^2\,x - 1$

1. Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene una medida de 240°.

2. Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene una medida de 150°.

3. Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene una medida de 225°.

Instrumento de evaluación

AUTOEVALUACIÓN

Subraya la repuesta correcta de los siguientes problemas.

I. Resuelve los siguientes problemas de aplicación a la vida diaria, que involucran un triángulo rectángulo:

1) Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de largo. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

a) 39°48´20´´
b) 50°11´40´´
c) 32°48´20´´
d) 140°48´20´´

2) Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

a) 1222 m^2
b) 4886.40 m^2
c) 9776.50 m^2
d) 6885.90 m^2

3) Un dron que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?

a) 782.51 *m.*
b) 753.30 *m.*
c) 3763.70 *m.*
d) 1703.30 *m.*

4) La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar el radio de la circunferencia inscrita.

a) $28.97\ m.$
b) $14.48\ m.$
c) $15.68\ m.$
d) $24.45\ m.$

5) Encontrar las coordenadas en el círculo trigonométrico para los segmentos de recta cuyo ángulo tiene una medida de 300°.

a) $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
b) $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
c) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
d) $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6) Al convertir 4.3 radianes a grados, resulta:

a) $123°11'8.5''$
b) $145°28'1.5''$
c) $26°23'12''$
d) $246°22'16.5''$

7) Al convertir 157°32´3´´ grados a radianes, resulta:

a) $0.75\pi\ rad.$
b) $0.875\pi\ rad.$
c) $0.775\pi\ rad.$
d) $0.925\pi\ rad.$

8) Al simplificar la siguiente expresión con trigonometría, resulta:

$\frac{csc\ x}{sec\ x} =$

a) $cot\ x$

b) $\frac{1}{\cot x}$

c) $sec\ x$

d) $\tan x$

9) Al simplificar la siguiente expresión con trigonometría, resulta:

$cos^2 x\,(sec^2 x - 1) =$

a) $sen^2 x$

b) $-sen^2 x$

c) $cos^2 x$

d) $-cos^2 x$

10) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°.Resolver el triángulo.

a) $< A = 35.4°,\ \alpha = 2.13m,\ c = 3.68\ m.$

b) $< A = 35.4°,\ \alpha = 4.22m,\ c = 3.68\ m.$

c) $< A = 35.4°,\ \alpha = 2.13m,\ c = 5.78\ m.$

d) $< A = 35.4°,\ \alpha = 8.33m,\ c = 6.5\ m.$

Instrumento de evaluación

Si de la actividad anterior respondiste correctamente todos los reactivos considera tu resultado **EXCELENTE,** si fueron 9 los reactivos que contestaste correctamente considera tu resultado como **MUY BUENO**, si fueron 8 considera tu resultado **BUENO**, de 6 a 7 como **REGULAR** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **INSUFICIENTE**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

<table>
<tr><td rowspan="5">¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos en función de las respuestas correctas que tuviste?
Señala con una ✓ según sea el número de reactivos correctamente contestados.
➢ Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
➢ Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Esta competencia será alcanzada si obtuviste un desempeño BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE.</td><td>EXCELENTE.</td><td></td></tr>
<tr><td>MUY BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>REGULAR.</td><td></td></tr>
<tr><td>INSUFICIENTE.</td><td></td></tr>
</table>

Si tu resultado fue **BUENO**, **MUY BUENO** O **EXCELENTE** te felicitamos y te motivamos a que sigas esforzándote como lo has hecho y, obviamente, que corrijas aquello que no te permitió alcanzar la excelencia; si tu desempeño fue **REGULAR** O **INSUFICIENTE**, refuerza tus conocimientos consultando de nuevo el contenido del bloque si lo consideras necesario. Además te invitamos a que te acerques a tu maestro o tus compañeros para que le solicites el apoyo para reforzar los temas en los que fallaste, asimismo, que acudas a asesorías en donde se te apoyará para que mejores tu desempeño y puedas obtener mejores resultados.

COEVALUACIÓN

I. Resuelve los siguientes problemas de aplicación a la vida diaria, que involucran un triángulo rectángulo.

1) Un ingeniero que desea calcular el ancho de un río, camina 80 metros paralelo al río sobre el borde desde un punto situado directamente frente a un árbol, sobre la orilla opuesta ; si el ángulo entre la orilla del rio y la línea de observación hacia el árbol en este punto es de 60°, ¿Cuál es el ancho del rio?

2) Desde un barco situado a 50 metros del pie de un acantilado, se observa que el ángulo de elevación a la punta es de 35°. Calcula la altura del acantilado.

3) Un alambre sujeta una antena de radio desde la punta hasta un punto en el suelo, a 40 metros de la base de la antena. Si el alambre forma un ángulo de 58° con el suelo, ¿Cuánto mide la antena?

4) La longitud de la cuerda que sujeta un papalote es de 50 metros y el ángulo de elevación es de 60°. Calcula su altura suponiendo que la cuerda se mantiene recta.

5) Medio kilómetro del plano inclinado corresponde a 0.43 km del horizontal. Para cubrir una distancia de 3.5 km sobre la horizontal, ¿Cuántos kilómetros deberá subir un automóvil cuesta arriba? ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

6) Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°.

7) Calcular la longitud del lado y de la apotema de un octógono regular, inscrito en una circunferencia de 49 centímetros de radio.

8) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 15 m y b = 23 m. Resolver el triángulo.

9) Convertir 3. 4 radianes a grados.

10) Convertir 137° grados a radianes.

11) Convertir 78°23´´5´grados a radianes.

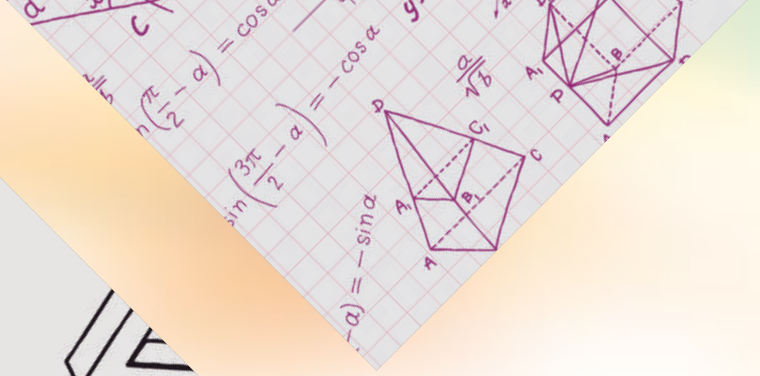
12) Verifica las siguientes identidades trigonométricas.

a) $(sec^2 x)(cos^2 x) + cos^4 x = \dfrac{1}{sec^2 x}$

b) $cot^2 x = cos^2 x + (cot\, x \,.\, cos\, x)^2$

c) $(cotx)\,(secx) = cscx$

d) $sec^2 x + csc^2 x = \dfrac{1}{(sen^2 x)\,(cos^2 x)}$



Bloque 5

Aplicas las leyes de los senos y cosenos

Desempeño del estudiante ¿Cómo lo aprenderé?

- Emplear las leyes de los senos y cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.
- Resolver y/o formular problemas de su entorno u otrosámbitos donde apliquen las leyes de los senos y cosenos.

Objetos de aprendizaje ¿Qué aprenderé?

- Ley de senos.
- Enunciar la ley de los senos.
- Identificar los datos que se necesitan conocer para utilizar la ley de los senos.
- Aplicar la ley de los senos en la solución de triángulos oblicuángulos.
- Aplicar la ley de los senos en la solución de problemas de tu entorno u otros ámbitos.

Tiempo Asignado: 10 horas

- Ley de cosenos.
- Enunciar la ley de los cosenos.
- Identificar los datos que se necesitan conocer para utilizar la ley de los cosenos.
- Aplicar la ley de los cosenos en la solución de triángulos oblicuángulos.
- Aplicar la ley de los cosenos en la solución de problemas de tu entorno u otros ámbitos.

Competencias disciplinares a desarrollar Me servirá para:

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas matemáticas o gráficas.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definimiento o curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

I. Selecciona la letra que corresponda a la respuesta correcta y anótala dentro de los paréntesis:

1. (   ) La razón que existe entre el cateto adyacente al ángulo agudo A y la hipotenusa de un triángulo rectángulo es:

   A) Coseno A.
   B) Seno A.
   C) Tangente A.
   D) Cosecante A.

2. (   ) La razón que existe entre el cateto opuesto al ángulo agudo B y la hipotenusa de un triángulo rectángulo es:

   A) Coseno A.
   B) Seno A.
   C) Tangente A.
   D) Secante A.

3. (   ) En la siguiente igualdad: $\textit{Sen } A = \dfrac{a}{c}$ el resultado de despejar la incógnita **c**,es:

   A) c = (**a**) (**Sen a**)

   B) $c = \dfrac{a}{\textit{Sen } A}$

   C) c = **a - Sen A**

   D) $c = \dfrac{\textit{Sen } A}{a}$

4. (   ) El resultado de despejar Aen la igualdad es:

   A) $A = \cos^{-1}\left(\dfrac{b}{c}\right)$

   B) $A = \cos\left(\dfrac{b}{c}\right)$

   C) $A = \dfrac{b}{\textit{Cos } C}$

   D) $A = \dfrac{\textit{Cos } b}{c}$

5. (   ) Es el valor de la incógnita en la siguiente igualdad: $\dfrac{x}{\textit{Sen}30°} = \dfrac{8}{\textit{Sen}45°}$:

   A) $x = 5.65$

   B) $x = 11.31$

   C) $x = 4$

   D) $x = 16$

6. ( ) Es el valor de la incógnita en la siguiente igualdad: $x = \sqrt{(10)^2 + (12)^2 - 2(10)(12)\text{ Cos}10°}$:

A) $x = 18.05$

B) $x = 236.08$

C) $x = -0.68$

D) $x = 10.20$

7. ( ) Es el resultado de la siguiente operación: $\textbf{Sen}^{-1}\left(\frac{(8)\,(\textbf{sen } 110)}{12}\right)$:

A) 0° 0' 36.28"

B) 38° 47' 22.4"

C) 0° 34' 38.46"

D) 34° 45' 0.81"

8. ( ) Es el resultado de la siguiente operación: $\textbf{Cos}^{-1}\left(\frac{11^2 - 15^2 - 20^2}{-2\,(15)(20)}\right)$:

A) 32° 51' 35.57"
B) 60° 26' 24.33"
C) 95° 09' 48.99"
D) ***No existe***

9. ( ) El teorema de Pitágoras está relacionado con un triángulo:

A) Acutángulo.
B) Obtusángulo.
C) Rectángulo.
D) Equiángulo.

10. ( ) En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm, respectivamente, el valor de la hipotenusa del triángulo es:
A) 14 cm.
B) 44 cm.
C) 10 cm.
D) 100 cm.

Inicio

Secuencia didáctica 1
LEY DE LOS SENOS

De entrada

Al término de esta secuencia podrás resolver triángulos oblicuángulos, encontrando el valor de los elementos restantes, utilizando la ley de los senos.

De los conocimientos adquiridos en los bloques anteriores, obtendrás como evidencia de aprendizaje, la solución de problemas cotidianos que involucren el planteamiento de la ley de los senos.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos
    - Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.
    - Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Además, como producto principal, podrás resolver varias situaciones de nuestro entorno donde para encontrar respuesta se requiera el uso de la ley de los senos.

ACTIVIDAD 1

SD1-B5

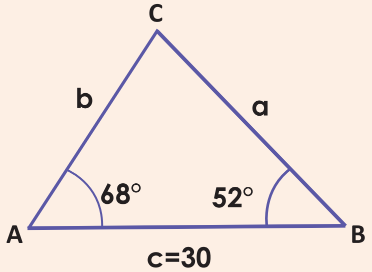
Con el apoyo de tu profesor, forma un equipo con cuatro de tus compañeros (5 integrantes),trasládense a la plaza cívica del plantel, dos de los integrantes utilizarán el goniómetro construido en el bloque 4 para medir el ángulo de elevación al punto más alto de la asta bandera, otros dos integrantes estarán apoyando en el registro de la medida del ángulo anteriormente mencionado en sus cuadernos, el último de los integrantes del equipo estará tomando fotografías de la situación.
Con las medidas obtenidas y con el apoyo de las fotografías tomadas:

Elaborar una estrategia que permita calcular la altura de la asta bandera del plantel.

Desarrollo

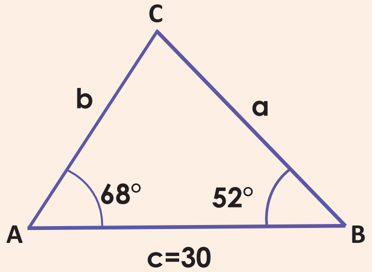
ACTIVIDAD 2
SD1-B5

Consideremos el siguiente triángulo:



1) Encontrar el valor del ángulo C (∢ C)=____________

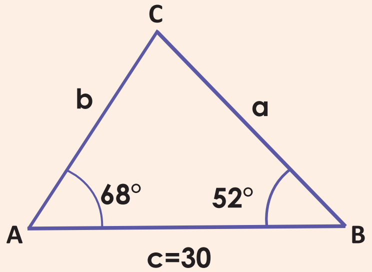
2) Considerar la altura correspondiente al lado **a** (trazarla en el triángulo).



3) Utilizar los resultados del bloque anterior para calcular el valor de la altura
h =_________.

4) Habiendo encontrado el valor de **h** utiliza el triángulo ACD(D es el punto de intersección de la altura que parte del vértice A y el lado BC) para calcular **b=**__________.

5) Traza en el triángulo original la altura correspondiente al lado c.



6) Encontrar el valor de ésta altura utilizando uno de los triángulos rectángulos que se formaron al trazarla.

7) Encontrar el valor del lado a.

8) Hallar la razón que existe entre el lado **a** y el **Sen A**, es decir, el valor de:

$\frac{\mathbf{a}}{\textbf{\textit{Sen A}}} = \underline{\qquad\qquad} =$

9) Hallar la razón que existe entre el lado **c** y el **Sen C**, es decir, el valor de:

$\frac{\mathbf{c}}{\textbf{\textit{Sen C}}} = \underline{\qquad\qquad} =$

10) Hallar la razón que existe entre el lado **b** y el **Sen B**, es decir, el valor de:

$\frac{\mathbf{b}}{\textbf{\textit{Sen B}}} = \underline{\qquad\qquad} =$

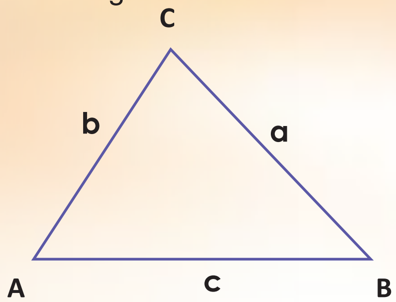
En las actividades anteriores nos dimos cuenta, que también se pueden resolver triángulos que NO son rectángulos a los cuáles llamaremos OBLICUÁNGULOS.

El procedimiento que se estuvo utilizando fue algo laborioso, sin embargo, al observar el resultado de calcular la razón entre cada uno de los lados del triángulo y el Seno del ángulo opuesto a cada uno de ellos notamos que es el mismo, lo que nos permite enunciar un resultado que nos permitirá resolver este tipo de triángulos de manera menos laboriosa.

A continuación, te presentamos dicho resultado:

LEY DE SENOS: En todo triángulo, los lados son proporcionales a los Senos de los ángulos opuestos a cada uno de ellos.

Si nos apoyamos en el siguiente triángulo:



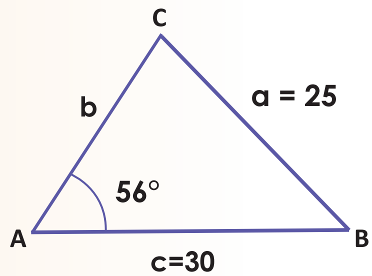
La ley de Senos queda escrita algebraicamente de la siguiente manera:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ A} = \frac{c}{Sen\ A}$$

Para poder utilizarla es necesario conocer:

1) Dos lados del triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos.
2) Dos ángulos y un lado.

Ejemplos: Dados los siguientes triángulos, hallar el valor de los elementos restantes.



Para resolver el triángulo y utilizar de manera correcta la Ley de Senos se sugiere que de la igualdad:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C}$$

De las tres razones, se tome en cuenta aquella que se conozca ambos datos (lado y ángulo) y se iguale a aquella en la que se conoce un dato (lado o ángulo según sea el caso).

En el ejemplo que se está resolviendo serían:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{c}{Sen\ C}$$

De donde tenemos que despejar el ángulo **C**.

Es recomendable que antes de despejar cualquier incógnita, multipliquemos cruzado e igualemos, esto nos permitirá despejar más fácilmente:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{c}{Sen\ C}$$

$$(a)(Sen\ C) = (c)(Sen\ A)$$

De esta manera se puede observar que más fácil despejar la incógnita.

Despejando **C**:

$$\text{Sen } C = \frac{(c)(\text{Sen } A)}{a}$$

$$C = \text{Sen}^{-1}\left[\frac{(c)(\text{Sen } A)}{a}\right]$$

Sustituyendo valores:

$$C = \text{Sen}^{-1}\left[\frac{(30)(\text{Sen } 56°)}{a}\right]$$

Teniendo los valores del ángulo **A** y el ángulo **C** podemos obtener el valor del ángulo **B** de la siguiente manera:

B = 180° - ∢ A - ∢ C ∢

B = 180°∢ – 56° – 84° 10´ 47.42´´

B = 39° ∢ 49´ 12.58´´

Y para obtener el valor del lado **b**, utilizaremos la igualdad:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}$$

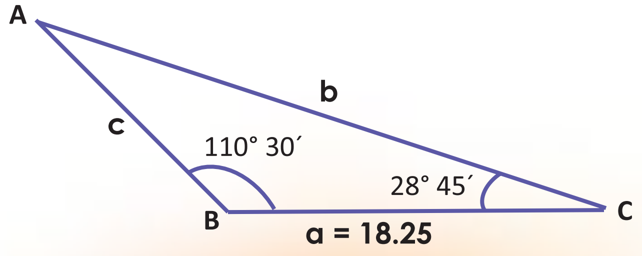
$$(a)(\text{Sen } B) = (b)(\text{Sen} A)$$

$$b = \frac{(a)(\text{Sen } B)}{\text{Sen } A}$$

Sustituyendo valores:

$$b = \frac{(25)(\text{Sen } 39°\ 49'\ 12.58'')}{\text{Sen } 56°}$$

2)



De los tres elementos que te piden que encuentres, es claro que el que se ve más fácil de encontrar es el ángulo A, ya que:

A = 180°∢ – 110° 30´ – 28° 45´

A = 40° ∢ 45´

Para calcular el valor de **b**, puedes considerar la igualdad:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

$$(a)(Sen\ B) = (b)(Sen A)$$

$$b = \frac{(a)(Sen\ B)}{Sen\ A}$$

Sustituyendo valores:

$$b = \frac{(18.25)(Sen\ 110°\ 30')}{Sen\ 40°45'} = 26.18$$

De igual manera para calcular el valor del lado **c** consideramos la igualdad:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{c}{Sen\ C}$$

$$(a)(Sen\ C) = (c)(Sen A)$$

$$b = \frac{(a)(Sen\ C)}{Sen\ A}$$

Sustituyendo valores:

$$b = \frac{(18.25)(Sen\ 28°\ 45')}{Sen\ 40°45'} = 13.44$$

ACTIVIDAD 3

SD1-B5

Utiliza la Ley de Senos para calcular el valor de los elementos restantes de los triángulos cuyos valores son:

1) a = 9	B=75°	C = 65°
2) A = 120°	a = 25	b = 18°
3) A = 95°	a = 35	B = 45°
4) 110° 25´ 30´´	b = 23.75	C= 40° 30´ 45´´
5) 62° 30´	a= 9.75	b) =15.25

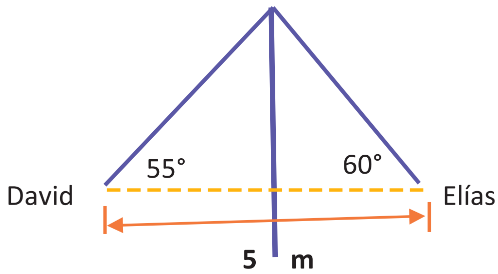
Problemas de aplicación de la ley de los senos

Supongamos que en la actividad de inicio uno de los equipos obtuvo los siguientes datos:

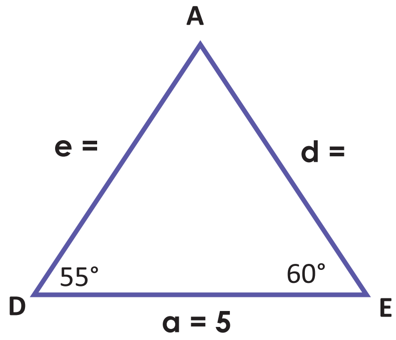
Elías y David se encuentran separados una distancia de 5 metros uno del otro, en la plaza cívica de uno de los planteles del Colegio de Bachilleres, ambos con la ayuda del goniómetro casero miden el ángulo de elevación al punto más alto de la asta bandera que se encuentra en su plantel.

El ángulo medido por Elías fue aproximadamente de 60° y el medido por David de 55° aproximadamente. ¿Qué distancia existe desde el punto más alto de la asta bandera al punto donde se efectuó la medición del ángulo de elevación?

Si realizamos una representación gráfica de la situación (supongamos que la medición se efectuó de la siguiente manera):



Para resolver el problema podemos considerar el siguiente triángulo con los siguientes datos:



Por los datos que se observan podemos calcular el ángulo A debe medir 65° y también los datos nos permiten darnos cuenta que para calcular el valor de los lados **d** y **e**, es necesario utilizar la Ley de los Senos.

Si consideramos la igualdad:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{d}{Sen\ D}$$

$$(a)(Sen\ C) = (d)(Sen\ D)$$

$$b = \frac{(a)(Sen\ D)}{Sen\ A}$$

Sustituyendo valores:

$$d = \frac{(a)(\text{Sen } D)}{\text{Sen } A}$$

$$b = \frac{(5)(\text{Sen } 55^\circ)}{\text{Sen } 65^\circ} = 4.51m$$

De la misma forma si queremos calcular el valor de **e**, utilizaremos la igualdad:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{e}{\text{Sen } E}$$

$$(a)(\text{Sen } E) = (e)(\text{Sen } E)$$

$$e = \frac{(a)(\text{Sen } E)}{\text{Sen } A}$$

Sustituyendo valores:

$$e = \frac{(a)(\text{Sen } E)}{\text{Sen } A}$$

$$b = \frac{(5)(\text{Sen } 60^\circ)}{\text{Sen } 65^\circ} = 4.77m$$

Lo que nos permite concluir que la distancia del punto más alto de el asta de la bandera, al punto donde David midió el ángulo de elevación es de 4.51 m y con respecto a Elías es de 4.77 m, con esto el problema queda resuelto.

ACTIVIDAD 4
SD1-B5

Plantea y resuelve los siguientes problemas haciendo la representación gráfica correspondiente:

1) Moisés y Edgar se encuentran entrenando futbol soccer, ambos se encuentran separados una distancia entre si de 8.5 metros, el ángulo de tiro de Moisés hacia el centro de la portería es de 58° y el de Edgar hacia el mismo punto es de 55°, si ambos golpean un balón hacia el centro de la portería. ¿Qué distancia recorrerá el balón que golpee Moisés? ¿Qué distancia recorrerá el balón golpeado por Edgar?

2) Para encontrar el ancho de un río, un topógrafo establece dos puntos P y Q separados 50 metros en una de las orillas del río; posteriormente elige un punto R en la orilla opuesta y determina la medida del ángulo QPR como 78° y la medida del ángulo RQP como 62°. Determina el ancho del río.

3) Rosa María y Concepción se encuentran separadas 825 metros unas de la otra y ambas observan un helicóptero que se eleva en el espacio comprendido entre sí, Rosa María mide el ángulo de elevación como 62° 25´ y Concepción lo mide como 57°30´. ¿A qué distancia se encuentra el helicóptero de ambas?

4) Un crucero navega hacia el este, cuando se observa una luz con una orientación de 52°30´al Noreste. Después que el crucero ha navegado 3.5 kilómetros, la luz se encuentra a 44° 25´ al noreste. Si el curso se mantiene igual, ¿Cuál será la menor distancia entre el crucero y la luz?

5) Sobre un cerro de la sierra sonorense, situado a la ribera de un río se encuentra una torre de 45 metros de altura. Desde lo alto de la torre el ángulo de depresión de un punto de referencia, en la orilla opuesta del río es de 26°30´y desde la base de la torre, el ángulo de depresión al mismo punto es de 17°25´. Hallar la anchura del río y la altura del cerro.

Cierre

ACTIVIDAD 5

SD1-B5

Guarda esta actividad en tu Portafolio de evidencias.

I. Utiliza la Ley de Senos para calcular el valor de los elementos restantes de los triángulos cuyos valores son:

1) **c = 52**	**B=53°**	**C = 86°**
2) **A = 121° 25´**	**a = 52.65**	**B = 41° 20´**
3) **b = 45**	**c = 35**	**C = 45°**
4) **a = 525**	**b = 412**	**C= 130° 52´**
5) A= 33° 40´	**a= 31.5**	**b) =15.8**

II. Plantea y resuelve los siguientes problemas haciendo la representación gráfica correspondiente:

1) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles miden 32°30´. Si la base de dicho triángulo mide 18 centímetros. ¿Cuánto mide los lados congruentes del triángulo?

2) Calcular la distancia que debe recorrer un obrero para subir y bajar una carretilla por una rampa. Sabemos que la base de la rampa mide 27 metros y tiene una inclinación de 30º en la subida y 39º en la bajada.

3) **A** y **B** son dos puntos localizados en las márgenes opuestas de un río. Desde **A** se traza una línea AC = 50 m y se miden los ángulos CAB = 96°45´ y el ángulo BCA = 35°30´. Hallar la longitud AB.

Inicio

Secuencia didáctica 2
LEY DE LOS COSENOS

De entrada

Al término de esta secuencia podrás resolver triángulos oblicuángulos, encontrando el valor de los elementos restantes, utilizando la ley de los cosenos.

De los conocimientos adquiridos en los bloques anteriores, obtendrás como evidencia de aprendizaje, la solución de problemas cotidianos que involucren el planteamiento de la ley de los cosenos.

Además, recuperarás la siguiente competencia genérica a través de sus atributos:

• Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos

  o Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.

  o Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Además, como producto principal, podrás resolver varias situaciones de nuestro entorno donde para encontrar respuesta se requiera el uso de la ley de los cosenos.

ACTIVIDAD 1
SD2-B5

INSTRUCCIONES:

1) Reúnanse en equipo de tres.

2) Primero, de manera individual respondan el cuestionamiento del siguiente problema, justificando su respuesta:

   Dos barcos tienen equipo de radio con un alcance de 200 km. Uno de los barcos se encuentra a 150 km en una dirección de 43°15´al noreste(N43°15´E) y el otro está a 160 km en dirección de 40°30´al noroeste(N44°30´O) de una estación costera. ¿Pueden los barcos comunicarse entre sí directamente?

3) En base a la respuesta que dio la mayoría, en equipo traten de justificarla o respaldarla utilizando lo aprendido hasta aquí en este curso.

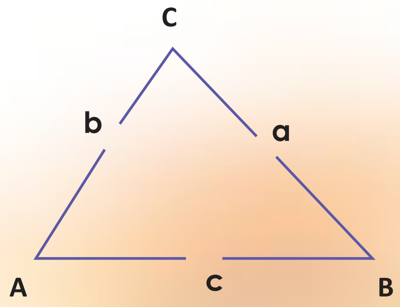
Desarrollo

En la actividad de inicio si utilizaste una representación gráfica, para el planteamiento del problema, te diste cuenta que se forma un triángulo oblicuángulo, pero los datos que nos proporciona el problema son insuficientes, para utilizar la ley de los senos que estudiaste en la secuencia anterior.

En esta secuencia desarrollaremos la ley de los cosenos, que será una herramienta que nos ayudará a dar respuesta a situaciones, como la que se están planteando en la actividad de inicio.

Ley de los cosenos: En todo triángulo, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Considera el siguiente triángulo:



La representación analítica de la ley de cosenos queda escrita de la siguiente manera:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

Para poder utilizarla es necesario conocer:

1) Dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos.
2) Los tres lados del triángulo.

Como se observa en la representación de la ley de los cosenos, al utilizarla podemos conocer los lados del triángulo o sus ángulos, de tal manera que, si despejamos de la fórmula, obtenemos:

1) Ley de los cosenos para encontrar los lados del triángulo, cuyos vértices están representados por las letras A, B, Y C.

$$a= \sqrt{b^{2+}c^2 - 2bcCosA}$$
$$b= \sqrt{a^2 + c^2 - 2acCosB}$$
$$c= \sqrt{a^2 + b^2 - 2abCosC}$$

2) Ley de los cosenos para encontrar los ángulos del triángulo, cuyos vértices están representados por las letras A, B, Y C.

Consideremos la igualdad:

$$b^2 + c^2 - 2bcCosA = a^2$$

Despejemos **A**:

$$b^2 + c^2 - 2bcCosA = a^2$$
$$- 2bcCosA = a^2 - b^2 - c^2$$
$$CosA = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{- 2bc}$$
$$A = Cos^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{- 2bc}\right)$$

O bien.

$$A = Cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

(Pregunta a tu profesor: ¿El porqué del segundo despeje?).

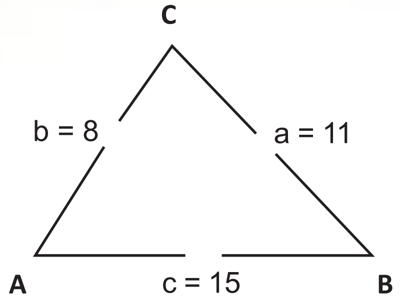
De igual manera, si despejamos el ángulo **B** o en ángulo **C**, obtenemos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right) \text{ o bien } \mathbf{B} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right) \text{ o bien } \mathbf{C} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Ejemplos: Dados los siguientes triángulos. Halla el valor de los elementos restantes.

1)



Calcularemos primero el ángulo **A**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) \text{ o bien } \mathbf{C} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Sustituyendo valores:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{11^2 - 8^2 - 15^2}{-2(8)(15)}\right)$$, realizando la operación en la calculadora.

ShiftCos **((11² – 82 – 15²)÷(– 2 por 8 por 15)) = 45.572996**, convirtiendo el resultado en grados, minutos y segundos, quedaría 45°34´22.79´´.

O de haber sustituido los valores en el otro despeje:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{8^2 + 15^2 - 11^2}{2(8)(15)}\right)$$

realizando la operación en la calculadora:

ShiftCos**((8² + 15² – 11²)÷(2 por 8 por 15)) = 45.572996**, convirtiendo el resultado en grados, minutos y segundos, quedaría 45°34´22.79´´.

Independientemente el despeje que utilices el resultado es el mismo, es por eso que te recomendamos que utilices aquel con el que te sientas más cómodo utilizarlo.

Para el cálculo del ángulo **Butilizamos:**

$$B = Cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}\right) = Cos^{-1}\left(\frac{8^2 - 11^2 - 15^2}{2(8)(15)}\right) = 103°8´11.61´´$$

Para encontrar el valor del ángulo **C** tenemos dos opciones:

OPCIÓN 1:

$$B = Cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}\right) = Cos^{-1}\left(\frac{15^2 - 11^2 - 8^2}{-2(11)(8)}\right) = 31°17´25.6´´$$

OPCIÓN 2:

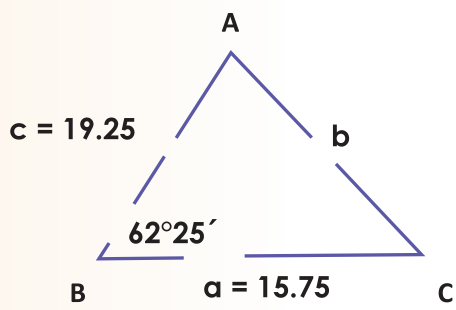
Como ya se tienen los valores de los ángulos **A** y **B** y sabiendo que la suma de las medidas de los tres ángulos es igual a 180°, entonces:

C= 180°∢ –A– B ∢ ∢

∢ **C** =180° – 45°34´22.79´´ – 103°8´11.61´´

C = 31°∢ 17´25.6´´

2)



Aquí debemos calcular primero el valor del lado **b**, para esto utilizaremos la fórmula:

$$b= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bcCosB}$$

Sustituyendo valores:

$$a= \sqrt{(15.75)^2 + (19.25)^2 - 2(15.75)(19.25)Cos65°45´}$$

Realizando la operación en la calculadora:

$$a= \sqrt{(15.75^2 + 19.25^2 - 2 \text{ por } 15.75 \text{ por } 19.25 \text{ por } Cos65°45´)} = 18.46$$

Procedemos ahora de la misma forma que en el ejemplo anterior para calcular el valor de los ángulos **A** y **C**.

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2ac}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15.75^2 - 18.46^2 - 19.25^2}{-2(18.46)(19.25)}\right) = 49°19'9.38''$$

C= 180°∢ – **A**– B

∢ **C** =180° – 49°19´9.38´´ – 62°45´

C = 67°55´50.62´´

ACTIVIDAD 2
SD2-B5

Hallar el valor de los elementos restantes en los siguientes triángulos, cuyos valores son:

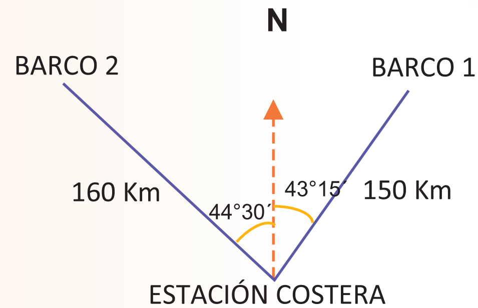
1) **a = 25**	**B=38**	**C = 52**
2) **a = 18.95**	**a = 17.15**	**B = 28.55**
3) **a = 12**	**b= 18**	**c = 27**
4) **b = 8.95**	**c = 12.75**	**C= 110°**
5) C= 64° 30´	**a= 78**	**b) =85**
6) C= 49°19´9.38´´	**a= 29**	**b= 35**

Aplicación de la ley de los cosenos

Retomemos el problema con el que iniciamos esta secuencia didáctica:

Dos barcos tienen equipo de radio con un alcance de 200 km. Uno de los barcos se encuentra a 150 km en una dirección de 43°15´al noreste(N43°15´E), y el otro está a 160 km en dirección de 40°30´al noroeste(N44°30´O) de una estación costera. ¿Pueden los barcos comunicarse entre sí directamente?

Si realizaste una representación gráfica de la situación debe haber quedado de la siguiente manera:



Para responder al cuestionamiento hecho: **¿Pueden los barcos comunicarse entre sí directamente?**

Basta calcular la distancia comprendida entre ellos, de tal manera que si dicha distancia es menor o igual a 200 Km los barcos podrán comunicarse entre sí, en caso contrario, es decir, si la distancia entre ambos barcos es mayor de 200 Km que es el alcance de sus radios, entonces los barcos NO podrán comunicarse entre sí.

Para calcular la distancia entre ambos barcos, si observas la gráfica, te darás cuenta que podemos utilizar la ley de los cosenos para encontrar el valor del tercer lado de un triángulo, es decir, podemos utilizar la fórmula:

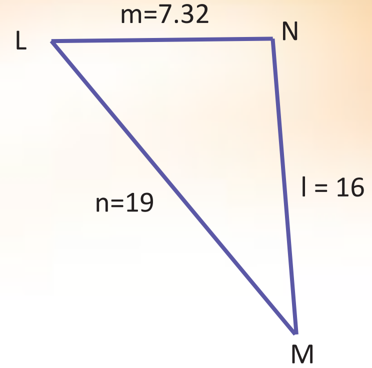
Distancia entre ambos barcos = $\sqrt{(150)^2 + (160)^2 - 2(150)(160)\text{Cos}87°45´}$

Distancia entre ambos barcos = 214.97 Km

Lo que significa que los barcos NO pueden comunicarse entre sí directamente

Ejemplo: En la final de la copa américa de futbol en su edición 2016 entre las selecciones de Argentina y Chile, Lionel Messi cobró un tiro libre, sabiendo que la portería mide de poste a poste 7.32 m y que Messi se encontraba a 16 m del poste más cercano a él, y a 19 m del otro poste, ¿Cuál era la medida del ángulo de tiro que tenía al cobrar el tiro libre Lionel Messi?

Si hacemos el planteamiento del problema haciendo uso de un triángulo, tendríamos el siguiente gráfico:



Para resolver el problema es necesario calcular el valor del ángulo M. para esto utilizaremos la fórmula:

$$M = Cos^{-1}\left(\frac{m^2 - l^2 - n^2}{-2ln}\right) = Cos^{-1}\left(\frac{7.32^2 - 16^2 - 19^2}{-2(16)(19)}\right) = 22°4´40.44´´$$

Lo que nos permite afirmar que el ángulo de tiro que tenía Lionel Messi en ese tiro libre era de **22°4´40.44´´**.

ACTIVIDAD 3
SD2-B5

Plantea y resuelve los siguientes problemas. Realiza la representación gráfica de cada uno de ellos.

1) Tres circunferencias, cuyos radios miden 20 cm, 30 cm, y 40 cm, son tangentes exteriores entre sí. ¿Qué ángulos forman al unirse los centros de las circunferencias?

2) Para ir de Hermosillo a Cajeme es necesario viajar 110 Km al sur y 144 Km en dirección de 50° al sureste (S50°E), ¿Qué distancia hay entre Hermosillo y Cajeme?

3) De Puerto Peñasco Sonora dos embarcaciones zarpan simultáneamente con rumbos de 20° al sureste(S20°E) y 35° al suroeste(S35°O) con velocidad constante de 85 Km/hr y 95 Km/hr, respectivamente. Después de dos horas, ¿Qué distancia separa a las embarcaciones?

4) Para fomentar la integración familiar, promover el turismo deportivo y generar derrama económica la COFETUR(Comisión de fomento al turismo) y el ayuntamiento de Hermosillo impulsan el evento denominado como CRUCE BAHÍA KINO – ALCATRAZ.

5) En la edición 2016 los hermanos Guajardo (Diego y Leonardo) parten de un mismo punto de la isla de Alcatraz hacia la playa, separados por un ángulo de 10°, en el momento que ambos han nadado una distancia de 350 metros, ¿Qué tan separados están uno del otro?

6) A las 7:00 a.m. un barco B estaba a 60 millas al este de un barco A. Si el barco A navega al oeste a 20 millas por hora y el barco B navega con rumbo al sureste a 30 millas por hora. ¿Qué tan separados uno del otro estarán a las 10:00 a.m.?

Cierre

ACTIVIDAD 4
SD1-B5

Guarda esta actividad en tu Portafolio de evidencias.

I. Hallar los elementos restantes del triángulo PQR si :

1)	$p = 9.5$	$Q = 62°$	$r = 11.5$
2)	$p = 25$	$q = 30$	$r = 35$
3)	$P = 29°35'$	$q = 12.75$	$r = 10.85$
4)	$p = 15$	$q = 19$	$R = 110°\ 50'\ 45''$
5)	$p = 120$	$q = 115$	$r = 135$

II. Plantea y resuelve los siguientes problemas.

1) Hallar la medida de cada uno de los ángulos interiores de un triángulo cuyos lados miden 15 cm, 18 cm y 23 cm respectivamente.

2) En uno de los juegos eliminatorios para el mundial Rusia 2018, el jugador de la selección mexicana Marco Fabián está por ejecutar un tiro libre directo, conociendo que la portería mide de poste a poste 7.32 metros y Marco se encuentra a una distancia de 15 metros y 17 metros de ambos postes, ¿Cuál es su ángulo de tiro?

3) Para trasladarse de Hermosillo a San Luis Río Colorado(SLRC) es necesario viajar 171 Km al norte y 458 Km en dirección de 47°30´al noroeste(N47°30´O). ¿Qué tan separados se encuentra SLRC de Hermosillo?

AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: Lee con cuidado cada uno de los siguientes reactivos, realiza las operaciones necesarias que te permitan seleccionar, la letra que corresponda a la respuesta correcta y anótala dentro de los paréntesis:

1. (   ) Para utilizar la Ley de los Senos es necesario conocer de un triángulo:
   A) Sus tres ángulos.
   B) Sus tres lados.
   C) Un lado y dos ángulos.
   D) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

2. (   ) En el triángulo **ABC**, **a = 8cm**, la medida del ángulo **A** es de **48°** y el valor del lado **b = 6.5 cm.** ¿Cuál es la medida del ángulo **B**?
   A) 37°8´34.48´´
   B) 66°9´16.64´´
   C) 42°
   D) 0°36´13.7´´

3. (   ) En el triángulo **PQR** el ángulo **P** mide **40°**, el ángulo **Q** mide **56°** y la longitud del lado **"r"** es de **22.5 cm.** ¿Cuál es la medida del lado **p**?
   A) 18.75 cm.
   B) 14.54 cm.
   C) 29.01 cm.
   D) 17.44 cm.

4. (   ) En un triángulo obtusángulo el ángulo mayor y el ángulo menor miden**110°** y **28°** respectivamente, si el lado común a ellos mide **27 cm**, ¿Cuánto mide el lado de mayor longitud del triángulo?
   A) 54.04 cm
   B) 37.91 cm
   C) 18.94 cm
   D) 70.71 cm

5. (   ) En un terreno de forma triangular, dos de sus lados miden **18m** y **25 m** respectivamente, si el ángulo opuesto al lado de **25 m** es de **62°**. La medida del ángulo opuesto al lado de **18 m** es:
   A) 39°28´24.87´´
   B) 1°13´34.74´´
   C) 0°38´8.6´´
   D) 35°28´24.87´´

6. (   ) Para utilizar la ley de los cosenos es necesario conocer de un triángulo:
   A) Sus tres ángulos.
   B) Sus tres lados.
   C) Un lado y el ángulo opuesto a uno de ellos.
   D) Dos ángulos y el lado común a ellos.

7. (   ) En el triángulo **ABC**, **a = 8**, **B = 48°** y **c = 6.5**. La medida del lado **b** es:
   A) – 19.33
   B) 6.05
   C) 6°3´17.22´´
   D) 36.66

8. (   ) En el triángulo cuyos lados miden **12 cm**, **18 cm** y **27 cm** respectivamente, la medida del ángulo comprendido entre los lados de **12 cm** y **18 cm**, es:
A) 127°10´8.04´´
B) 20°44´30.9´´
C) 32°5´21.06´´
D) 52°49´51.96´´

9. (   ) Un biólogo coloca un dispositivo localizador a un halcón para una investigación. En un momento dado, el halcón vuela **25 Km** con dirección al sur, después cambia su dirección con un ángulo de **75°** hacia el suroeste (**s75°0**), volando **35Km**.¿ A qué distancia se encuentra del punto de partida?
A) 27.49 Km.
B) 37.37 Km.
C) 47.98 Km.
D) 59.50 Km.

10. (   ) La magnitud resultante de dos fuerzas de **115 Kg** y **225 Kg** es de **290 Kg**. La medida del ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes es:
A) 113°2´8.46´´
B) 21°24´12.06´´
C) 45°33´39.48´´
D) 134°26´20.5´´

Instrumento de evaluación

Si de la actividad anterior respondiste correctamente todos los reactivos, considera tu resultado **EXCELENTE** si fueron 9 los reactivos que contestaste correctamente, considera tu resultado como **MUY BUENO**, si fueron 8 considera tu resultado **BUENO**, de 6 a 7 como **REGULAR** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **INSUFICIENTE**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de los conocimientos de tu compañero en función de las respuestas correctas que obtuvo? **Señala con una ✓ según sea el número de reactivos correctamente contestados.** ➢ Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. ➢ Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. Esta competencia será alcanzada si obtuviste un desempeño un **BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE.**	**EXCELENTE.**	
	MUY BUENO.	
	BUENO.	
	REGULAR.	
	INSUFICIENTE.	

Si tu resultado fue **BUENO**, **MUY BUENO** O **EXCELENTE** te felicitamos y te motivamos a que sigas esforzándote como lo has hecho y, obviamente, que corrijas aquello que no te permitió alcanzar la excelencia; si tu desempeño fue **REGULAR** O **INSUFICIENTE**, refuerza tus conocimientos consultando de nuevo el contenido del bloque si lo consideras necesario. Además te invitamos a que te acerques a tu maestro o tus compañeros para que le solicites el apoyo para reforzar los temas en los que fallaste, asimismo, que acudas a asesorías en donde se te apoyará para que mejores tu desempeño y puedas obtener mejores resultados.

COEVALUACIÓN

INSTRUCCIONES:

1) Reúnete con dos de tus compañeros y respondan de manera individual cada uno de los siguientes reactivos.
2) Ya que hayan contestado los reactivos intercambien sus módulos para la revisión del trabajo que realizaron (es importante que nadie se quede con su propio módulo).
3) De la manera más honesta evalúa al compañero que te tocó.
4) Registra el resultado obtenido en la escala estimativa que viene al final y entrega el módulo a tu compañero.

LEE CON CUIDADO CADA UNO DE LOS SIGUIENTES REACTIVOS, REALIZA LAS OPERACIONES NECESARIAS QUE TE PERMITAN SELECCIONAR LA LETRA, QUE CORRESPONDA A LA RESPUESTA CORRECTA Y ANÓTALA DENTRO DE LOS PARÉNTESIS:

1. ( ) Para utilizar la Ley de los Senos es necesario conocer de un triángulo:
   A) Dos ángulos y el lado común a ellos.
   B) Sus tres lados.
   C) Sus tres ángulos.
   D) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

2. ( ) En el triángulo **ABC**, **a = 8cm**, la medida del ángulo **A** es de **48°** y el valor del lado **b = 6.5 cm**. ¿Cuál es la medida del ángulo **C**?
   A) 37°8´34.48´´
   B) 66°9´16.64´´
   C) 42°
   D) 94°51´25.52´´

3. ( ) En el triángulo **PQR** el ángulo **P** mide **40°**, el ángulo **Q** mide **56°** y la longitud del lado **"r"** es de **22.5 cm.** ¿Cuál es la medida del lado **q**?
   A) 18.75 cm.
   B) 14.54 cm.
   C) 29.01 cm.
   D) 17.44 cm.

4. ( ) En un triángulo obtusángulo el ángulo mayor y el ángulo menor miden **110°** y **28°** respectivamente, si el lado común a ellos mide **27 cm**, ¿cuánto mide el lado de menor longitud del triángulo?
   A) 54.04 cm.
   B) 37.91 cm.
   C) 18.94 cm.
   D) 70.71 cm.

5. (   ) Un terreno de forma triangular, dos de sus lados miden **18 m** y **25 m** respectivamente, si el ángulo opuesto al lado de **25 m** es de **62°**. La medida del tercer lado del terreno es:
   A) 27.74 m.
   B) 18.30 m.
   C) 22.52 m.
   D) 43 m.

6. (   ) Para utilizar la ley de los cosenos es necesario conocer de un triángulo:
   A) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
   B) Sus tres ángulos.
   C) Un lado y el ángulo opuesto a uno de ellos.
   D) Dos ángulos y el lado común a ellos.

7. (   ) En el triángulo **ABC**, **a = 8**, **b = 6.05**, y **c = 6.5**. La medida del Ángulo **A** es:
   A) 79°6´53.03´´
   B) 47°57´25.38´´
   C) 13°33´28.66´´
   D) 0°11´19.83´´

8. (   ) En el triángulo cuyos lados miden **12 cm**, **18 cm** y **27 cm** respectivamente, la medida del ángulo comprendido entre los lados de **18 cm** y **27 cm**, es:
   A) 120°10´8.04´´
   B) 20°44´30.9´´
   C) 32°5´21.06´´
   D) 52°49´51.96´´

9. (   ) Un biólogo coloca un dispositivo localizador a un halcón para una investigación. En un momento dado, el halcón vuela **25 Km** con dirección al sur, después cambia su dirección con un ángulo de **65°** hacia el suroeste(**S65°O**), volando **35 Km**. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?
   A) 27.49 Km.
   B) 33.32 Km.
   C) 47.98 Km.
   D) 50.88 Km.

10. (   ) La magnitud resultante de dos fuerzas de **115 Kg** y **225 Kg** es de **290 Kg**. La medida del ángulo formado por la magnitud resultante y la fuerza de mayor peso, es:
   A) 113°2´8.46´´
   B) 21°24´12.06´´
   C) 45°33´39.48´´
   D) 134°26´20.5

Instrumento de evaluación

Si de la actividad anterior tu compañero respondió correctamente todos los reactivos considera su resultado **EXCELENTE**, si fueron 9 los reactivos que contestó correctamente considera su resultado como **MUY BUENO**, si fueron 8 considera su resultado **BUENO**, de 6 a 7 como **REGULAR** y si sus respuestas correctas fueron menos de 6 considera su desempeño como **INSUFICIENTE**.

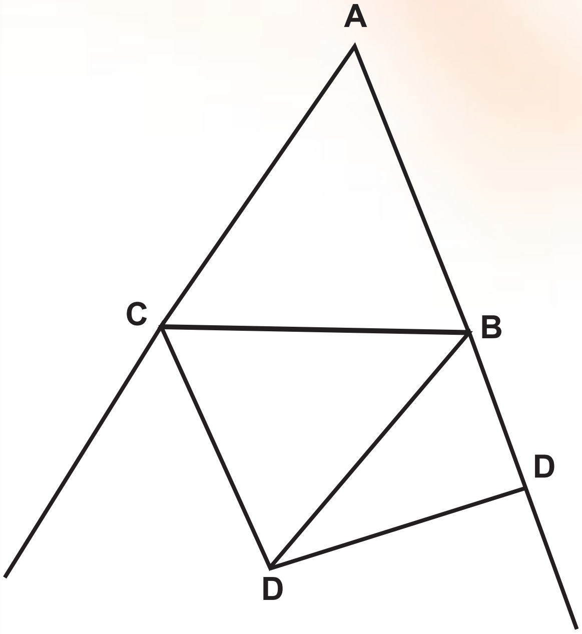
<table>
<tr><td rowspan="5">¿Cómo evalúas el nivel de los conocimientos de tu compañero en función de las respuestas correctas que obtuvo?
Señala con una ✓ según sea el número de reactivos correctamente contestados.
➢ Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
➢ Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Esta competencia será alcanzada si obtuviste un desempeño un BUENO, MUY BUENO O EXCELENTE.</td><td>EXCELENTE.</td><td></td></tr>
<tr><td>MUY BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>BUENO.</td><td></td></tr>
<tr><td>REGULAR.</td><td></td></tr>
<tr><td>INSUFICIENTE.</td><td></td></tr>
</table>

Si tu resultado fue **BUENO**, **MUY BUENO** O **EXCELENTE** te felicitamos y te motivamos a que sigas esforzándote como lo has hecho y, obviamente, que corrijas aquello que no te permitió alcanzar la excelencia; si tu desempeño fue **REGULAR** O **INSUFICIENTE**, refuerza tus conocimientos consultando de nuevo el contenido del bloque si lo consideras necesario. Además te invitamos a que te acerques a tu maestro o tus compañeros para que le solicites el apoyo para reforzar los temas en los que fallaste, asimismo, que acudas a asesorías en donde se te apoyará para que mejores tu desempeño y puedas obtener mejores resultados.

¿TE atreves?

Plantea y resuelve los siguientes problemas:



1. Se requiere calcular las distancias de un punto **C** a los puntos **A** y **B**, pero no se pueden medir directamente. La línea **CA** se prolonga de **A** hasta un punto **D** una distancia de **175 m**, la prolongación de la línea **CB** llega hasta un punto **E** a una distancia de 225 m con respecto a B, y se miden las distancias **AB = 300 m**, **DB = 326 m** y **DE = 488 m**. Hallar la medida de **AC** y **BC**.

2. Deduce la Ley de los senos.

3. Deduce la Ley de los cosenos.

4. Sea **ABC** un triángulo tal que **AB = BC = 5** y **AC = 6**. Si las bisectrices de los ángulos exteriores **B** y **C** se intersectan en **D** y **DE** es perpendicular a **AB**; ¿Cuál es la longitud de **AE**?

GLOSARIO

A

Altura: segmento de recta que partedel vértice de un triángulo y que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.

Ángulo: es la abertura que se forma entre dos rayos que tienen un punto en común llamado vértice. A los rayos se le denominan lados del ángulo.

Ángulos adyacentes: son aquellos que tienen un vértice en común y comparten uno de sus lados, es decir, se encuentran sobre la misma recta.

Ángulo central de un polígono regular: el ángulo central de un polígono es el que tiene su vértice en el centro del polígono y su lado inicial y final son dos radios del polígono.

Ángulo central de una circunferencia: el ángulo central de una circunferencia es el que tiene su vértice en el centro dela circunferencia y su lado inicial y final son dos radios dela misma.

Ángulos complementarios: son dos o más ángulos adyacentes cuyas medidas suman un ángulo recto, es decir, suman 90°. Así, si se tienen dos ángulos complementarios un ángulo es complemento del otro.

Ángulos conjugados: son aquellos ángulos cuya suma es de 360°. Por ejemplo, el conjugado de 120° es 240°.

Ángulo de depresión: es el que se forma entre la línea visual de un observador y un objeto cuando este se encuentra debajo de la horizontal.

Ángulo de elevación: es el que se forma entre la línea visual de un observador y un objeto cuando este se encuentra arriba de la horizontal.

Ángulo exterior de un polígono: el ángulo exterior se forma al prolongar uno de los lados del polígono, es decir, el ángulo exterior es adyacente a uno de los ángulos interiores del polígono.

Ángulo exterior en una circunferencia: es el que tiene su vértice fuera de la circunferencia y puede estar formado por: dos secantes, dos tangentes, o bien por una secante y una tangente.

Ángulo inscrito: el ángulo inscrito es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.

Ángulo interior: un ángulo interior es el ángulo formado por dos lados consecutivos del polígono.

Ángulos suplementarios: son ángulos adyacentes cuyas medidas suman un ángulo llano, es decir, suman 180º. Así, si dos ángulos son suplementarios uno es el suplemento del otro.

Ángulo semi-inscrito: es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son una secante y una tangente.

Ángulos opuestos por el vértice: son aquellos que tienen un vértice en común y los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.

Apotema de un polígono regular: el apotema es el segmento de recta que une el centro del polígono con el punto medio de uno de sus lados y tiene la propiedad de ser perpendicular a éste.

Arco: es una parte de la circunferencia.

B

Baricentro: punto de intersección de las medianas de un triángulo. También conocido como centroide del triángulo.

Bisectriz: recta que pasa por el vértice de un triángulo y que divide al ángulo en dos partes congruentes.

C

Cateto opuesto (a): es el lado opuesto al ángulo.

Cateto adyacente (b): es el lado contiguo al ángulo.

Circuncentro: punto de intersección de las mediatrices de un triángulo, es el centro de una circunferencia que circunda al triángulo.

Círculo: es el área delimitada por una circunferencia, es decir, es el conjunto de puntos interiores de la circunferencia, incluyéndola.

Circunferencia: es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto fijo llamado centro (C).

Circunferencia circunscrita a un polígono regular: es la circunferencia que está fuera del polígono cuyo radio es el radio del polígono.

Circunferencias concéntricas: circunferencias que tienen el mismo centro.

Circunferencia inscrita en un polígono regular: es la circunferencia que está dentro del polígono cuyo radio es la apotema del polígono.

Congruencia: se dice que hay congruencia entre dos figuras si al colocar una sobre la otra todos sus puntos coinciden, es decir, si ambas figuras tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Corona circular: es el área que existe entre dos circunferencias concéntricas.

Cuerda: es el segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia.

D

Diagonal : es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

Diámetro: es la cuerda mayor de una circunferencia, es decir, es el segmento de recta que une a dos puntos de la circunferencia y contiene al centro. El diámetro mide dos veces el radio.

E

Escuadrar: es un proceso mediante el cual los albañiles y otros artesanos verifican que el ángulo que se forma entre dos segmentos o superficies es de 90o.

Estadio: medida de longitud, usadas en las antiguas ciudades de Grecia y Roma, de 125 pasos geométricos equivalente a 185 m aproximadamente.

G

Gnomon: instrumento que servía para medir la altura del sol con respecto al paso del tiempo, consta de una superficie plana horizontal con una escala graduada, sobre la cual se coloca de manera perpendicular un objeto alargado llamado estilo.

Goniómetro: es una herramienta que nos permite medir la elevación de cualquier objeto de manera sencilla mediante una serie de cálculos.

H

Hipotenusa (c): es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.

I

Identidad trigonométrica: es una igualdad entre expresiones que contienen razones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidos

Incentro: punto de intersección de las bisectrices de un triángulo, es el centro de una circunferencia inscrita al triángulo.

J

Línea: es un conjunto infinito de puntos. Es una forma que tiene longitud (largo) pero carece de ancho y alto, es decir, es una forma de una dimensión.

Línea curva: conjunto de puntos siempre unidos tal que no se encuentran en una misma dirección, es decir, que entre cada par de puntos consecutivos no existe la misma pendiente.

Línea recta: conjunto de puntos tal que dos puntos consecutivos de ella tienen una misma pendiente o inclinación o dirección.

Longitud de arco: en una circunferencia: es la medida del arco subtendido por dos radios de la circunferencia.

O

Ortocentro: punto de intersección de las alturas de un triángulo.

P

Pantógrafo: instrumento que sirve para copiar dibujos aumentando o disminuyendo su tamaño, basado en paralelogramos articulados.

Perímetro: la palabra perímetro viene del vocablo griego: “peri” que significa alrededor y “metron” medida, es decir, el perímetro de una figura geométrica es la medida de su contorno. En el caso de un polígono es la suma de sus lados y en el caso de una circunferencia es la medida de la misma.

Polígono: la palabra polígono viene del vocablo griego: “poli” que significa muchos y “gonos” ángulos, es decir, el polígono es una figura geométrica que tiene muchos ángulos o muchos lados, mínimo tres y generalmente en un plano.

Punto: objeto que sólo tiene posición, es decir, carece de dimensión.

R

Radio de un polígono regular: es un segmento de recta que une el centro del polígono con uno de sus vértices.

Radio de una circunferencia: es la distancia del centro a cualquier punto que pertenece a la circunferencia, siendo esta distancia siempre la misma.

Radián: es el valor del ángulo cuya medida de su arco es igual al radio de una circunferencia cuyo radio vale 1.

Recíproco: es el resultado de multiplicarlos que resulte la unidad.

S

Secante: es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Segmento de recta: porción de recta comprendida entre dos puntos llamados extremos.

Semi-circunferencia: es la mitad de una circunferencia.

Semi-círculo: es la mitad de un círculo, es decir, el área delimitada por una semicircunferencia.

Semirrecta o rayo: porción de recta que empieza en un punto fijo y se extiende indefinidamente en una dirección.

Scaphe: instrumento esférico cuya superficie está cuadriculada.

T

Triángulo: es una superficie plana delimitada por tres lados, tres vértices, tres ángulos internos y tres externos.

Tangente: es la recta que toca a la circunferencia en un punto. A este punto se le conoce como punto de tangencia. La recta tangente tiene la propiedad de ser perpendicular al radio formado por el centro y el punto de tangencia.

Trigonometría: es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Etimológicamente significa “medida de triángulos”.

REFERENCIAS

Bibliografía:

- Valenzuela Chavez Alma Lorenia. (2010). Matemáticas 2. Hermosillo, Sonora:Cobach.
- Godoy Ramiro, et. al. . (2014). Matemáticas 2. Hermosillo, Sonora: Cobach.
- Programa de estudio para Matemáticas 2. SEP.

Webgrafías (Bloque 3):

- https://www.google.com.mx/search?q=eratostenes+y+el+radio+de+la+tierra&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&espv=2&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiokbnKrZ_PAhXH8CYKHRYsCwsQ_AUIBigB#q=eratostenes%20y%20el%20radio%20de%20la%20tierra&tbm=isch&tbs=rimg%3ACejrgAknHuteIjhkAhNvqlngwl-hj8cDbbK5Cyac9AgRLPRbCsW05hmUQVIK-yy_1dt-NghXGVXBX3Wwio9WL8p8gbQyoSCWQCE2-qWeDCEQNTyeUK4wmIKhIJX6GPxwNtsrkRTW_1GrMF_1ZS0qEgkLJpz0CBEs9BF7rvLTiA4UAyoSCVsKxbTmGZRBEQpk8UjDsaZVKhIJWUr7LL9202ARZQE5HqurfeIqEgmFcZVcFfdbCBFI00DMFMUQ5CoSCaj1YvynyBtDEY4RxO7imRHe&imgdii=_zaFn-kd-alrHM%3A%3B_zaFn-kd-alrHM%3A%3B_Z-ePZrv_csFhM%3A&imgrc=_zaFn-kd-alrHM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=imagen+de+un+diamante&espv=2&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwip87f9u8bPAhUW0IMKHSPgCHMQ_AUIBigB#tbm=isch&q=estrella+de+david+imagenes&imgrc=hzCO0ZTohgEaCM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=imagen+de+una+torre+de+antena&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&espv=2&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiBjf3zrJTPAhXGdz4KHalZA3QQ_AUIBigB#imgdii=KmcoAXFavSbPGM%3A%3BKmcoAXFavSbPGM%3A%3BRY9uF63sO8C8tM%3A&imgrc=KmcoAXFavSbPGM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=imagen+de+un+diamante&espv=2&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwip87f9u8bPAhUW0IMKHSPgCHMQ_AUIBigB#q=imagen%20de%20un%20diamante&tbm=isch&tbs=rimg%3ACVdOCmMdXxPnIjisN1IRpRSAeFxqkoHoZdGzq3altrGh-_1Oi6KflbtYwX9NDpBcNDyGjmFOql398oP4kC295NMDsuyoSCaw3UhGlFIB4EYRWbNGiUr0uKhIJXGqSgehl0bMRz0RI7hix5p4qEgmrdqW2saH78xGftjkIU12azSoSCaLop-Vu1jBfEeQPJp9rnJI7KhIJ00OkFw0PIaMRlzO7Ots_19z0qEgmYU6qXf3yg_1hE_1So-N0QXoWyoSCSQLb3k0wOy7Ec5lYZoxeuzV&imgrc=_
- https://es.wikipedia.org/wiki/Francia_metropolitana
- https://www.google.com.mx/search?q=l%27hexagone&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwirmuWuodTPAhUFrlQKHSREBTIQ_AUICCgB&biw=1005&bih=468#q=l%27hexagone&tbm=isch&tbs=rimg%3ACYGqu7MQo-uLIjiKd64gPzJGANOyYnw85auxHE_1egrhoml1HXk1PoHTYFj3H5z6AFrE1og4MIugOt-ExupIYlkbRvioSCYp3riA_1MkYAEbErSEg4nsA1KhIJ07JifDzlq7ERQrgk7KvFxy8qEgkcT96CuGiaXRErlGmJHbTABioSCUdeTU-gdNgWEdlvnGTXlaYsKhIJPcfnPoAWsTURdyUWZ9CSXM8qEgmiDgwi6A634RGnLYFNQ-fVYioSCTG6khiWRtG-ESsgaYkdtMAG
- https://es.wikipedia.org/wiki/Pappus_de_Alejandr%C3%ADa
- https://jlmateos.wordpress.com/2012/02/09/matematicas-pappus-de-alejandria-y-el-teorema-del-hexagono/
- https://es.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Maraldi
- https://www.google.com.mx/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=kepler%20biografia
- https://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Darwin

- https://www.google.com.mx/search?q=darwin+biografia&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&espv=2&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwjsx82D1dXPAhUnjFQKHcREDywQ_AUIBigB&dpr=1
- https://www.google.com.mx/search?q=se%C3%B1ales+viales&espv=2&biw=1012&bih=644&site=webhp&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwikktDsoYrPAhUM34MKHda6CLEQ_AUIBigB#tbm=isch&tbs=rimg%3ACT8VSMWjq1VwIjhyJbFK8Obov9jdBAcYAXygmxaxbujIA2btwUzJS6trckizszsfswL_1aeZoDGMvfp41iq_1D74sqrioSCXIlsUrw5ui_1EV6vJVi9xtmsKhIJ2N0EBxgBfKARSTAEmC5qLVsqEgmbFrFu6MgDZhGVc8geMCOIqSoSCe3BTMILq2tyEZwDtKrN2QSLKhIJSLOzOx-zAv8RAC85vGwJEugqEgIp5mgMYy9-nhH2OegCF5e-JyoSCTWKr8Pviyqu-ES_1D6MIQ1Vfq&q=se%C3%B1ales%20viales&imgrc=rdu721ExJXljSM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=animales+cuya+piel+tiene+dibujados+poligonos&espv=2&biw=1012&bih=644&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjtut7FporPAhXkzIMKHXjJDDoQ_AUIBigB#imgrc=sW5nWrXHAulgGM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=piel+de+una+jirafa&espv=2&biw=1012&bih=644&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiburvIp4rPAhWM6IMKHbH4A5IQ_AUIBigB#imgrc=y7upK5L90S0gQM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=los+poligonos+en+la+naturaleza&espv=2&biw=1012&bih=644&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjGpsfBq4rPAhVq2oMKHQR1BPcQ_AUIBigB#imgrc=j_6XZzRtn4eycM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=cristales+de+cuarzo&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi0yceMtIrPAhUB4oMKHSE8BtUQ_AUICCgB&biw=1012&bih=644#imgrc=ghIWa0llyrsWiM%3A
- https://conexioncristalina.wordpress.com/page/14/
- http://www.3djuegos.com/foros/tema/10500211/0/animales-domesticos-la-tortuga/
- http://www.ngenespanol.com/naturaleza/animales/16/01/27/estrella-de-mar-curiosos-raro-diferente-unico-marino.html
- https://www.google.com.mx/search?q=serpientes&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwigkK64tYjPAhUEyT4KHRsQCCsQ_AUIBigB#imgrc=fZ8P9I3V75gRJM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=serpientes&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwigkK64tYjPAhUEyT4KHRsQCCsQ_AUIBigB#imgrc=x0WukxB7XeUlSM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=piel+de+serpientes&espv=2&biw=1024&bih=509&tbm=isch&imgil=Hpc5-WJfz3uLSM%253A%253B1b0hkMmdUehtWM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.wallpapersxl.com%25252Fwallpaper%25252F1680x1050%25252Fcuero-descargar-fondos-de-pantalla-piel-serpiente-hd-widescreen-gratis-966655.html&source=iu&pf=m&fir=Hpc5-WJfz3uLSM%253A%252C1b0hkMmdUehtWM%252C_&usg=__bs9iJoIgcK-TFHRdMQr_fXhgNK4%3D&dpr=1&ved=0ahUKEwjMrfSfuIjPAhVMGT4KHdP1BhQQyjcIJA&ei=5uTVV8yiGsyy-AHT65ugAQ#imgrc=hWkT6P7ot7Le2M%3ª
- https://www.google.com.mx/search?q=piel+de+serpientes&espv=2&biw=1024&bih=509&tbm=isch&imgil=Hpc5-WJfz3uLSM%253A%253B1b0hkMmdUehtWM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.wallpapersxl.com%25252Fwallpaper%25252F1680x1050%25252Fcuero-descargar-fondos-de-pantalla-piel-serpiente-hd-widescreen-gratis-966655.html&source=iu&pf=m&fir=Hpc5-WJfz3uLSM%253A%252C1b0hkMmdUehtWM%252C_&usg=__bs9iJoIgcK-TFHRdMQr_fXhgNK4%3D&dpr=1&ved=0ahUKEwjMrfSfuIjPAhVMGT4KHdP1BhQQyjcIJA&ei=5uTVV8yiGsyy-AHT65ugAQ#imgrc=oXBgyS0tywQmkM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=piel+de+serpientes&espv=2&biw=1024&bih=509&tbm=isch&imgil=Hpc5-WJfz3uLSM%253A%253B1b0hkMmdUehtWM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.wallpapersxl.com%25252Fwallpaper%25252F1680x1050%25252Fcuero-descargar-fondos-de-pantalla-piel-serpiente-hd-widescreen-gratis-966655.html&source=iu&pf=m&fir=Hpc5-WJfz3uLSM%253A%252C1b0hkMmdUehtWM%252C_&usg=__bs9iJoIgcK-TFHRdMQr_fXhgNK4%3D&dpr=1&ved=0ahUKEwjMrfSfuIjPAhVMGT4KHdP1BhQQyjcIJA&ei=5uTVV8yiGsyy-AHT65ugAQ#imgrc=uWO51Tl5M8QLCM%3A
- https://es.dreamstime.com/imagen-de-archivo-ojos-rojos-grandes-image154101

- https://www.google.com.mx/search?q=ojos+de+insectos+ampliados&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjOoM3tu4jPAhWCWj4KHZ1AAeYQ_AUICCgB&biw=1024&bih=509#imgrc=jfU4MhYXWw353M%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=panales+de+miel+de+abeja&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiH4uzuvIjPAhXFXD4KHWsAC1sQ_AUICCgB&biw=1024&bih=509#imgrc=LtSrY5HBNFwhKM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=geometr%C3%ADa+en+arquitectura&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjS__zTwYjPAhVLeD4KHbvZAB0Q_AUIBigB
- https://www.google.com.mx/search?q=geometr%C3%ADa+en+arquitectura&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjS__zTwYjPAhVLeD4KHbvZAB0Q_AUIBigB#tbm=isch&q=geometr%C3%ADa+en+pintura
- https://www.google.com.mx/search?q=geometria+molecular&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiZvMH2w4jPAhVCdD4KHZYRBMoQ_AUIBigB#tbm=isch&q=geometria+molecular+del+carbono&imgrc=0PdFSYfoKTg6bM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=estructuras+de+compuestos+quimicos&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjD5rGzxYjPAhXE2D4KHUL-A3wQ_AUIBigB#imgrc=GlAKKc1dNwPrJM%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=pentagono&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&espv=2&biw=1024&bih=509&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjfg-H30IjPAhUIGD4KHbO5AqkQ_AUIBigB#imgrc=siJV2q2X9Za--M%3A
- https://www.google.com.mx/search?q=poleas+y+bandas&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&espv=2&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjT25iW_pHPAhVF4CYKHTjwCxwQ_AUIBigB
- https://www.google.com.mx/search?q=bicicletas&rlz=1C1AOHY_esMX709MX709&espv=2&biw=1005&bih=468&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjdparZ_pHPAhXEwiYKHVsSBeoQ_AUIBigB
- http://blogonprod.nearwen.com/%C2%BFpor-que-las-abejas-guardan-la-miel-en-hexagonos/
- http://www.taringa.net/post/info/12029514/Porque-las-Abejas-Construyen-Hexagonos.html
- http://www.teinteresa.es/educa/panales-abejas-hexagonales_0_937706674.html
- http://www.teinteresa.es/educa/panales-abejas-hexagonales_0_937706674.html
- http://gaussianos.com/las-matematicas-y-las-abejas/
- https://es.wikipedia.org/wiki/Panal
- http://culturacientifica.com/2014/02/26/el-rombododecaedro-estrellado-arte-abejas-y-puzzles-primera-parte/
- http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/17732/A.Soler%20Documento%20Proyecto%20Fin%20de%20Carrera.pdf?sequence=1
- http://ciudadseva.com/texto/el-cuento-mil-y-dos-de-scheherazade/

PLAN DE ESTUDIOS

PRIMER SEMESTRE Asignatura	H	C	SEGUNDO SEMESTRE Asignatura	H	C	TERCER SEMESTRE Asignatura	H	C	CUARTO SEMESTRE Asignatura	H	C	QUINTO SEMESTRE Asignatura	H	C	SEXTO SEMESTRE Asignatura	H	C
Matemáticas 1	5	10	Matemáticas 2	5	10	Matemáticas 3	5	10	Matemáticas 4	5	10	Historia Regional de Sonora	3	6	Filosofía	4	8
Química 1	5	10	Química 2	5	10	Biología 1	4	8	Biología 2	4	8	Geografía	4	8	Ecología y Medio Ambiente	3	6
Metodología de la Investigación	3	6	Introducción a las Ciencias Sociales	4	8	Historia de México 1	4	8	Historia de México 2	4	8	Estructura Socioeconómica de México	4	8	Historia Universal	4	8
Taller de Lectura y Redacción 1	4	8	Taller de Lectura y Redacción 2	4	8	Literatura 1	4	8	Literatura 2	4	8	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Ética 1	3	6	Ética 2	3	6	Física 1	5	10	Física 2	5	10	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Inglés 1	4	8	Inglés 2	4	8	Inglés 3	4	8	Inglés 4	3	6	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Informática 1	4	8	Informática 2	4	8	Formación para el trabajo	7	14	Formación para el trabajo	7	14	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Actividades Paraescolares: Orientación Educativa. **Opcional:** - Artísticas y culturales - Deportivas	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa. **Opcional:** - Artísticas y culturales - Deportivas	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: **Opcional:** - Artísticas y culturales - Deportivas	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa. **Opcional:** - Artísticas y culturales - Deportivas	3		Formación para el trabajo	7	14	Formación para el trabajo	7	14
												Actividades Paraescolares: Orientación Educativa	1		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa	1	
	31	56		32	58		36	66		35	64		31	60		31	60

FORMACIÓN PARA EL TRABAJO

1. Desarrollo Microempresarial
2. Comunicación
3. Servicios Turísticos
4. Inglés para Relaciones Laborales
5. Contabilidad
6. Informática
7. Gastronomía y Nutrición
8. Técnicas de Construcción

FORMACIÓN PROPEDÉUTICA

GRUPO 1
Químico Biólogico
GRUPO 2
Físico Matemático
GRUPO 3
Económico-Administrativo
GRUPO 4
Humanidades y Ciencias Sociales

COMPONENTE	ASIGNATURAS	CRÉDITOS
FORMACIÓN BÁSICA	32	260
FORMACIÓN PROPEDÉUTICA	8	48
FORMACIÓN PARA EL TRABAJO	8	56
ACTIVIDADES PARAESCOLARES	10	-
TOTAL:	58	364

-Mayo 2017-

SEP SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Gobierno del Estado de Sonora

SEC Secretaría de Educación y Cultura

SONORA UNIDOS LOGRAMOS MÁS